

Exercice 1. Éléments de correction

a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; par linéarité de la dérivation, on obtient facilement que $f(\lambda.P + Q) = \lambda.f(P) + Q$ (linéarité), et clairement $f(P)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (le polynôme nul ne peut pas être vecteur propre). Écrivons $P = a_n X^n + Q$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg Q < n$. Si P est vecteur propre alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(P) = (n-3)a_n X^{n+2} + \underbrace{na_n X^n - a_n X^n + f(Q)}_{\deg < n+2} = \underbrace{\lambda P}_{\deg = -\infty \text{ si } \lambda = 0 \text{ et } n \text{ sinon}}$$

et donc nécessairement (puisque deux polynômes égaux ont nécessairement même degré) $n-3=0 \implies n=3$.

c) On cherche P vecteur propre sous la forme $P = a + bX + cX^2 + X^3$; après calculs cela revient à chercher a, b, c et λ tels que :

$$a + 2bX + 3(c-a)X^2 + (4-2b)X^3 - cX^4 = \lambda a + \lambda bX + \lambda cX^2 + \lambda X^3$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a(\lambda - 1) = 0 \\ b(\lambda - 2) = 0 \\ -3a = 0 \\ 4 - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c = 0 \\ (\lambda = 2 \text{ et } b = 1) \text{ ou } (\lambda = 4 \text{ et } b = 0) \end{cases}$$

Finalement $Sp(f) = \{2, 4\}$ et $E_2(f) = Vect(X^3 + X)$ et $E_4(f) = Vect(X^3)$.

Exercice 2. Éléments de correction

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; λ est valeur propre de Δ ssi il existe une suite $u \in E$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = \lambda u_n \iff \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = (1 + \lambda)u_n$$

ssi E contient une suite géométrique non nulle de raison $1 + \lambda$ et convergeant vers 0, ssi $\lambda \in]-2, 0[$. Ainsi :

$$Sp(\Delta) =]-2, 0[$$

Exercice 3. Éléments de correction

a) La linéarité de ϕ est facile à établir. Il faut montrer aussi que $\varphi(f) \in E$ ce qui se ramène facilement à montrer la continuité de $\varphi(f)$ en 0 :

$$x > 0 \implies |\varphi(f)(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \leq \max_{[0, x]} |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre ssi il existe $f \in E \setminus \{O_E\}$ tel que :

$$\varphi(f) = \lambda f \iff \forall x > 0, \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) \quad (*)$$

ce qui équivaut par dérivation/primitivation (toutes les fonctions de E s'annulant en 0) à :

$$(*) \iff \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$$

En supposant en outre que $x > 0$:

$$\begin{aligned} (*) &\iff f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} f(x) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R}, f(x) = k.x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \end{aligned}$$

Une telle solution sera vecteur propre ssi $f \in E \setminus \{O_E\}$ ssi $x \mapsto x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$ se prolonge par continuité en 0 en y prenant la valeur 0, ssi $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$ ssi $\lambda \in]0, 1[$. Ainsi le spectre de φ est :

$$Sp(\varphi) =]0, 1[\quad \forall \lambda \in Sp(\varphi), E_\lambda(\varphi) = Vect(x \mapsto x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}).$$

Exercice 4. Éléments de correction

a) On obtient pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X+1)^3 - 1 = X(X^2 + 3X + 3)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$: ainsi A n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) On obtient un polynôme caractéristique scindé à racines simples : $\chi_B(X) = (X-3)(X-1)(X+1)$; Ainsi B est diagonalisable. On obtient pour sous-espaces propres :

$$E_{-1}(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_1(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_3(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

D'où la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}BP = \text{Diag}(-1, 1, 3).$$

c) On obtient un polynôme caractéristique scindé : $\chi_C(X) = (X-4)^2(X-1)$. On obtient pour sous-espaces propres :

$$E_4(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_2(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Le polynôme caractéristique est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres, C est donc diagonalisable avec pour matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}CP = \text{Diag}(4, 4, 2).$$

d) On obtient pour polynôme caractéristique $\chi_D(X) = (X + 1)^3$; le spectre étant un singleton tandis que la matrice D est non scalaire, D n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. On calcule le polynôme caractéristique (par exemple en décomposant le long de la première colonne) pour obtenir :

$$\chi_J(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ik\frac{2\pi}{n}})$$

qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$: J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$: J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On a J de rang 1 ; donc d'après le théorème du rang $\dim \ker J = n - 1$; or $\ker J = E_0(J)$ donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à $n - 1$; ainsi :

$$\chi_J(X) = X^n - \text{tr}(J)X^{n-1}$$

Deux cas surviennent :

- Si $\text{tr}(J) \neq 0$ (comme ici où $\text{tr}(J) = n$) alors c'est une valeur propre et $m(0) = \dim E_0(J) = n - 1$ et $1 \leq \dim E_{\text{tr}(J)}(J) = m(\text{tr}(J)) = 1$ donc J est diagonalisable.
- Si $\text{tr}(J) = 0$ (pas le cas ici..), alors $\dim E_0(J) = n - 1 < n = m(0)$ et donc J n'est pas diagonalisable.

Exercice 7. Soit A une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont égaux à λ . Alors $Sp(A) = \{\lambda\}$ et donc A est diagonalisable ssi il existe P inversible tel que :

$$A = P\lambda.I_n P^{-1} = \lambda.PI_n P^{-1} = \lambda.I_n$$

ssi A est une matrice scalaire.

Exercice 8. On considère deux cas :

- Si $i = j$ alors $E_{i,j}$ est diagonale et donc diagonalisable.
- Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale, donc de spectre réduit à

$\{0\}$ et donc non diagonalisable (car être semblable à la matrice nulle revient à être nulle.)

Exercice 9. Traités en cours. Dans chaque cas on exhibe un polynôme annulateur scindé à racine simple pour conclure par l'affirmative ; il est obtenu en élevant la matrice au carré.

- a) $A^2 = I_{2n}$; donc $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est polynôme annulateur de A .
- b) $B^2 = B$; donc $X^2 - X = X(X - 1)$ est polynôme annulateur de B .

Exercice 10. Il faut supposer $n > 1$.

- a) D'évidence $rg(A) \leq 2$.

– On n'a pas $rg(A) = 0$ car $A \neq O_{2n}$ car $a \neq 0$.

– On n'a pas $rg(A) = 1$ car autrement on aurait $\exists k \in \mathbb{R}, b = ka$ et $a = kb$ ce qui est impossible avec $|a| \neq |b|$.

Ainsi $rg(A) = 2$; d'après le théorème du rang :

$$\dim \ker A = \dim E_0(A) = 2n - 2 > 0$$

Ainsi $0 \in Sp(A)$ et $\dim E_0(A) = 2n - 2$.

- b) On trouve les deux vecteurs propres (et la valeur propre associée) :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = n(a + b) \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = n(a - b)$$

On en déduit que :

$$Sp(A) = \{0, n(a+b), n(a-b)\} \quad \dim E_0 = 2n - 2 = m(0) \quad \dim_{n(a \pm b)} = 1 = m(n(a \pm b))$$

et donc A est diagonalisable.

Exercice 11. Éléments de correction.

- (a) On trouve pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = (X - a)(X - 2)(X - 7)$$

– Si $a \neq 2, 7$: A est diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples.

– Si $a = 2$: A est diagonalisable ssi $\dim \ker(A - 2I_3) = 2$ ssi $rg(A - 2I_3) = 1$; et c'est bien ce que donne le calcul.

– Si $a = 7$: A est diagonalisable ssi $\dim \ker(A - 7I_3) = 2$ ssi $\text{rg}(A - 7I_3) = 1$; et c'est bien ce que donne le calcul.

Ainsi A est diagonalisable pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.

(b) Lorsque $a = 2$; un calcul classique donne pour matrices de passages :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = P \times \text{Diag}(2, 2, 7) \times P^{-1}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Le calcul du produit donne :

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^n + 4.7^n & -2^{n+1} + 2.7^n & 0 \\ 2.7^n - 2^{n+1} & 2^{n+2} + 2.7^n & 0 \\ 10.2^n - 10.7^n & 5.2^n - 5.7^n & 5.2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; On remarque que :

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & O_n \\ 2.A^2 & A^2 \end{pmatrix}$$

et plus généralement pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$B^p = \begin{pmatrix} A^p & O_n \\ p.A^p & A^p \end{pmatrix}$$

(que l'on peut prouver facilement par une récurrence).

Ainsi, remarquons que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, en notant $= \sum_{k=0}^p a_k X^k$:

$$P(B) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p a_k A^k & O_n \\ \sum_{k=0}^p k a_k A^k & \sum_{k=0}^p a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & O_n \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

Si B est diagonalisable, il existe P scindé à racines simples tel que $P(B) = O_{2n}$ et donc avec ce qui précède, $P(A) = O_n$. Ainsi A est aussi diagonalisable et de plus $AP'(A) = O_n$.

Mais soit λ valeur propre de A , alors $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$ puisque P toutes les racines de P sont simples. Ainsi si X est vecteur propre associé à λ , alors :

$$O_n \times X = O_{n,1} = A \times P'(A).X = A \times P'(\lambda).X = P'(\lambda).AX$$

et donc $AX = O_{n,1}$ c'est à dire $\lambda = 0$. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et donc, A étant diagonalisable, $A = O_n$.

Si $A = O_n$, clairement $B = O_{2n}$ est aussi diagonalisable.

En conclusion B est diagonalisable ssi $A = O_n$.

Exercice 13. Calculons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ -1 & X-1 & 1 \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3} \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ -(X-1) & X-1 & 1 \\ X-1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2)$$

ainsi A est diagonalisable ssi $\dim \ker(A - I_3) = 2$ ssi $\text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$ (avec le théorème du rang). Or le calcul de rang donne :

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow \tilde{C}_1 - C_2} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour rang 1 si $a = 0$ et 2 si $a \neq 0$. Ainsi A est diagonalisable ssi $a = 0$.

Exercice 14. Éléments de correction.

a) On obtient pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A = (X-2)^2(X-1)$$

il est scindé ; mais du fait que $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$ découle (avec le théorème du rang) que $\dim E_2 = 1 < m(2) = 2$. Ainsi A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

b) On détermine une bases des deux sous-espaces propres :

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

que l'on complète en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bien sur $A \times e_1 = e_1$ et $A \times e_2 = 2.e_2$; on vérifie facilement que :

$$A \times e_3 = e_1 + e_2 + 2.e_3$$

Ainsi A semblable à la matrice triangulaire supérieure :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex 15

a) $d \in \text{Sp}(f) \quad \exists x \neq 0_E \quad f(x) = d \cdot x$
 $\Rightarrow f^2(x) = d^2 \cdot x \Rightarrow d^2 \in \text{Sp}(f^2)$

b) A diagonale et nilpotente
 soit $n \in \mathbb{N} \quad A^n = 0_p$ λ vp de $A \Rightarrow \lambda^n$ vp de 0_p
 $\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{0\}$
 et A diagonalisable $\Rightarrow A = 0 \cdot I_p = 0_p$ //

Ex 20

E e.v. $u, v \in \mathcal{L}(E)$
 $d \neq 0$ valeur propre de $u \circ v$.
 $\exists x \neq 0_E \quad \text{tg} \quad u \circ v(x) = d \cdot x$
 $\Rightarrow v \circ u(v(x)) = d \cdot v(x)$
 et $d \neq 0 \Rightarrow v(x) \neq 0_E$
 donc d est vp de $v \circ u$. //

Ex 21

$n \in \mathbb{N} \quad A_n = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -2 \\ 1 & n+3 \end{pmatrix}$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\det(X I_n - A) = \begin{vmatrix} X - \frac{n}{n+1} & -\frac{2}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & X - \frac{n+3}{n+1} \end{vmatrix}$
 $= \frac{1}{(n+1)^2} \begin{vmatrix} (n+1)X - n & -2 \\ 1 & (n+1)X - (n+3) \end{vmatrix}$
 $= \frac{1}{(n+1)^2} \left[(n+1)^2 X^2 - (n+1)(2n+3)X + n(n+3) + 2 \right]$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \left[(n+1)^2 x^2 - (n+1)(2n+3)x + n^2 + 3n + 2 \right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \left[\text{---} + (n+1)(n+2) \right]$$

$$= x^2 - \frac{2n+3}{n+1}x + \frac{n+2}{n+1}$$

$$\Delta = \frac{(2n+3)^2}{(n+1)^2} - \frac{4(n+2)}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+3)^2 - 4(n+2)(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{4n^2 + 12n + 9 - 4(n^2 + 3n + 2)}{(n+1)^2}$$

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{\frac{2n+3}{n+1} \pm \frac{1}{n+1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2n+4}{2n+2} = 1 + \frac{1}{n+1} = 1'$$

$$x_2 = \frac{2n+2}{2n+2} = 1. \Rightarrow \text{An diagonal.}$$

$$A_n = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -2 \\ 1 & n+3 \end{pmatrix}$$

$$E_1: \begin{cases} nx - 2y = (n+1)x \\ x + (n+3)y = (n+1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

$$E_d: \begin{cases} nx - 2y = (1+n+1)x \\ x + (n+3)y = (1+nn)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

$$E_d = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \det P = -1 \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} A_n P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow A_n^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$d^n = \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

$$\Rightarrow A_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & e \\ -1 & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-e & 2-2e \\ e-1 & 2e-1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 2-e & 2-2e \\ e-1 & 2e-1 \end{pmatrix}}$$

Ex 22:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

$$u_0 = 1$$

$$v_0 = 0$$

1st method:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - u_n - v_n \\ &= u_{n+1} - u_n + u_n - u_n \end{aligned}$$

SRL2

$$\begin{aligned} &\dots \rightarrow 2u_{n+1} - 2u_n \\ &\boxed{u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n} \end{aligned}$$

2nd method:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = A U_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

$$\Rightarrow 2 \text{ up cplx conj. } \quad 1 \pm i$$

$$\begin{cases} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -ix$$

$$E_{1+i} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{1-i} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{can } A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} AX &= dX \Rightarrow \overline{A} \overline{X} = \overline{dX} \\ &\Rightarrow A \overline{X} = \overline{d} \overline{X} \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^n e^{-in\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^n e^{-in\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}^n}{2} \times \begin{pmatrix} e^{in\frac{\pi}{4}} & e^{-in\frac{\pi}{4}} \\ e^{i(n-2)\frac{\pi}{4}} & e^{-i(n-2)\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a = e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} = 2 \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$c = 2 \cos (n-2)\frac{\pi}{4}$$

$$b = 2 \cos (n+2)\frac{\pi}{4}$$

$$d = 2 \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A^n = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} & \cos \frac{(n+2)\pi}{4} \\ \cos \frac{(n-2)\pi}{4} & \cos \frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} & -\sin \frac{n\pi}{4} \\ \sin \frac{n\pi}{4} & \cos \frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4} \\ v_n = \sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4} \end{cases}$$

$$\underline{V_n \in \mathbb{R}^2}$$

Ex 23

$$u_0 = 5 \quad u_1 = 5 \quad u_2 = 17$$

$$u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = A \times U_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice comp. equ.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 4 & -4 & X-1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ X^2 & X & -1 \\ 4-4X & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + X^2 C_3 \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 4-4X+X^2 & -4X-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\chi_A = X^3 - X^2 - 4X + 4}$$

racin évidente $X=1$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X-1)(X^2 + aX - 4) \\ &= X^3 + (a-1)X^2 - (a+4)X + 4 \Rightarrow a=0 \end{aligned}$$

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X+2) \Rightarrow A \text{ diagonalisable}$$

$$H^n = P \begin{pmatrix} 1 & 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

valeurs prop: $1, 2, -2$.

$\Rightarrow u_n$ est combinaison linéaire de $1, 2^n, (-2)^n$.

$$\forall n \quad u_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma (-2)^n,$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma = 5 \\ \alpha + 4\beta + 4\gamma = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma = 5 \\ \alpha + 4\beta + 4\gamma = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma = 5 \\ \alpha + 4\beta + 4\gamma = 17 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 17 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \quad u_n = 1 + 3 \cdot 2^n + (-2)^n}$$

Ex 24

$$\varphi: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} b & c \\ d & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi^4 = \text{Id}_{M_2(\mathbb{R})} \Rightarrow X^4 - 1 \text{ polynôme annulateur.}$$

$$\Rightarrow \text{sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}.$$

$$X^2 - 1 \text{ n'est pas annulateur}$$

$$X^2 \mp 1 \text{ pas annulateur}$$

$$X - 1 \text{ n'est pas annulateur}$$

$$X + 1 \text{ n'est pas annulateur.}$$

$\Rightarrow$ non diagonalisable : $\nexists$ polynôme annulateur
scindé à racines simples.

Ex 26

$$M^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-11 & 5 & 5 \\ 5 & X-3 & -3 \\ 5 & -3 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \quad \begin{vmatrix} X-1 & 5 & 5 \\ X-1 & X-3 & -3 \\ X-1 & -3 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (X-1) \left(\begin{vmatrix} X-3 & -3 \\ -3 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & X-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ X-3 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (X-1) \left((X-3)^2 - 9 - 5(X-3) + 15 - 15 - 5(X-3) \right) \\ &= (X-1)(X^2 - 6X - 10X) = X(X-1)(X-16) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{sp}(A) = \{0, 1, 16\} \Rightarrow A \text{ diagonalizable.}$$

$$E_0(A): \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 & | & 0 \\ -5 & 3 & 3 & | & 0 \\ -5 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 & | & 0 \\ -5 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -5 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 8 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \quad E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{clair.$$

$$E_{16}(A) \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 & | & 0 \\ -5 & -13 & 3 & | & 0 \\ -5 & 3 & -13 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -8 & 8 & 8 & | & 0 \\ 8 & -8 & 8 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{16}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

no 26-18
sm 18

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{array} \right) \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Solnt : $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix} P^{-1} : 4 \text{ solutions}$

Ex 28

$$E = \mathbb{R}^N$$

$$f \in \mathcal{L}(E)$$

$$f: u \mapsto v$$

$$v_0 = u_0$$

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \quad n > 0$$

$$\rightarrow f(u) = du.$$

m'

$$v_0 = du_0$$

$$\forall n > 0 \quad \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = du_n$$

$$\frac{u_1 + u_0}{2} = du_1 \Rightarrow (2d-1)u_1 = u_0$$

et donc

$$(2d-1)u_n = u_{n-1}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$u_n = 0 \in$$

non

Spécial

vps

$$d \neq \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{1}{(2d-1)} u_{n-1}$$

$\frac{1}{d}$ = suite géométrique
de raison $\frac{1}{2d-1}$.

Exo 25 (Elevés de comat²)

CNS Au $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable.
le calcul donne:

$$X_B = X^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)X - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$$

$X = -\alpha$ est une racine évidente.

$$\Rightarrow X_B = (X + \alpha) \underbrace{(X^2 - \alpha X - (\alpha\beta + \beta^2))}_{\Delta = (\alpha + \beta)^2} \quad \lambda_1 = -\beta \quad \lambda_2 = \alpha + \beta$$

$$X_B = (X + \alpha)(X + \beta)(X - (\alpha + \beta))$$

1^{er} cas: si $-\alpha, -\beta$ et $(\alpha + \beta)$ sont distincts alors X_B est scindé à racines simples $\Rightarrow B$ diagonalisable

Dans le cas contraire : $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -2\beta$ ou $\beta = -2\alpha$.

2^{de} cas: si $\alpha = \beta = 0$ $B = O_3$ et diagonalisable

3^{de} cas: si $\alpha = \beta \neq 0$ $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Sp}(B) = \{-\alpha; 2\alpha\}$
 $m(-\alpha) = 2 \quad m(2\alpha) = 1$

D'après la caractéristique entière du polynôme caractéristique

$$B \text{ DZ} \Leftrightarrow \dim E_{-\alpha} = 2 \Leftrightarrow \dim \ker(B + \alpha I_3) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{rg } B + \alpha I_3 = 1$$

On $B + \alpha I_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ et de rang 1 puisque $\alpha \neq 0$.

$\Rightarrow$ Dans ce cas B est diagonalisable.

4^{de} cas: si $\alpha = -2\beta \neq 0$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -2\beta & \beta \\ -2\beta & 0 & \beta \\ -2\beta & \beta & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Sp}(B) = \{\alpha, \alpha + \beta\}$
 $m(\alpha) = 2 \quad m(\alpha + \beta) = 1$

$$B \text{ DZ} \Leftrightarrow \dim E_{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \ker B + \alpha I_3 = 2 \Leftrightarrow \text{rg } B + \alpha I_3 = 1$$

$$B + \alpha I_3 = \begin{pmatrix} -2\beta & -2\beta & \beta \\ -2\beta & -2\beta & \beta \\ -2\beta & \beta & -2\beta \end{pmatrix} \text{ a m rang } \begin{pmatrix} -2\beta & -2\beta & \beta \\ 0 & 3\beta & -3\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow B$ n'est pas DZ.

5^{de} cas: si $\beta = -2\alpha$: analogue: $B + \beta I_3 = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha & -2\alpha \\ \alpha & -2\alpha & -2\alpha \\ \alpha & -\alpha & -2\alpha \end{pmatrix}$ et de rang 2.
 B non DZ.

Exo 28: $(u_n), (v_n), (w_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

CNS sur u_0, v_0, w_0 pour que (u_n) et (v_n) et (w_n) convergent.

Soit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = A \times U_n$

On diagonalise A :

on obtient (par le calcul) $\chi_A = (X-1)(X+2)^2$ $\text{Sp}(A) = \{1, -2\}$

$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ donc $A \in \mathbb{D}_{\mathbb{R}}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ $D = \text{diag}(1, -2, -2)$

Par une récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = A^n \times U_0$
 $= P D^n P^{-1} U_0$.

Notons $P^{-1} U_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ on a alors: $U_n = P \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta(-2)^n \\ \gamma(-2)^n \end{pmatrix}$

et donc $\begin{cases} u_n = \alpha + \beta(-2)^n + \gamma(-2)^n \\ v_n = \alpha - \gamma(-2)^n \\ w_n = \alpha - \beta(-2)^n \end{cases}$ donc $(u_n), (v_n), (w_n)$ convergent
 si $\beta = \gamma = 0$

et donc si $U_0 = P \times \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ converge si $U_0 \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ si $\underline{u_0 = v_0 = w_0}$.