Exercice 1. On écrit $A = I_3 + B$ puis on calcule les puissances successives de B :

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \geqslant 3$$

Puisque A et I_3 commutent, d'après la formule du binôme :

$$A^0 = I_3, \quad A^1 = A, \text{ et pour } n \geqslant 2 :$$

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k$$

$$= I_3 + n.B + \frac{n(n-1)}{2}.B^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -n & n \times \frac{5-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^n}$$

Exercice 2.

a) Le calcul donne $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = O_3$.

b) On obtient alors $(I_3 + A)^3 = 0_3$ donc :

$$I_3 + 3.A + 3.A^2 + A^3 = O_3 \implies I_3 = A \times (-3.I_3 - 3.A - A^2) \implies \boxed{A^{-1} = -3.I_3 - 3.A - A^2}$$

Exercice 3. Dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $F = \{y \in E \mid y' - xy = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$.

a) F est l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y' - xy = 0$, c'est donc l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto Ce^{\frac{x^2}{2}}$ avec C une constante réelle.

Ainsi $F = Vect(x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}})$ est une sous-espace vectoriel de E.

b) Que G soit un sev découle de la linéarité de l'intégration; en effet, $G \neq \varnothing$ car l'application identiquement nulle appartient à G. Soient $f, g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\lambda.f + g = \int_0^1 (\lambda.f + g) = \lambda. \int_0^1 f + \int_0^1 g = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

ainsi $\lambda.f + g \in G$.

c) Montrons que f et g sont supplémentaire dans E.

D'une part $F \cap G = \{O_E\}$ puisque soit $f \in F \cap G$ alors $f(x) = C.e^{\frac{x^2}{2}}$ avec :

$$\int_0^1 C.e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = C. \underbrace{\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x}_{>0} = 0$$

puisque $x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est continue, positive et non nulle sur $[0, 1]$, et donc $f \in F \cap G \implies f = 0.e^{\frac{x^2}{2}} = O_E$.

Il reste à montrer que $E = F + G$. Soit $f \in E$ quelconque; notons $\displaystyle\int_0^1 f = L$. Alors

$$\int_0^1 f - \alpha e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 f - \alpha \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = L - \alpha K$$

en notant $K = \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x > 0$ (puisque l'intégrande est continue positive et non nulle).

Ainsi en choisissant $\alpha = \frac{L}{K}$, on a $f = \alpha e^{\frac{x^2}{2}} + (f - \alpha e^{\frac{x^2}{2}}) \in F + G$. Ainsi $E = F + G$ et finalement $E = F \oplus G$.

Exercice 4.

Exercice 5.

a) Clairement φ est linéaire par linéarité de la dérivation.

b) Base de $\ker \varphi$.

Notons $P = a_0 + a_1.X + a_2.X^2$; alors $P' = a_1 + 2a_2.X$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= 2a_0 + 2a_1.X + 2a_2.X^2 - a_1.X - 2a_2.X^2 + a_1 + 2a_2.X \\ &= (2a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2).X \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P} \in \ker \varphi \iff \begin{cases} 2a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -2a_0 \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

et donc $\ker \varphi = Vect(X^2 - 2X + 1)$. **c)** D'après le théorème du rang, $rg\varphi = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker \varphi = 3 - 1 = 2$.

d) On a vu au au b) que $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$; puisque $\dim \varphi = rg\varphi = 2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$, on en déduit que $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}_1[X]$.

e) On a d'une part $\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}_2[X]$; de plus soit $P \in \ker \varphi$, alors $\deg P = 2$ ou $-\infty$ et donc $P \in \ker \varphi \cap \mathrm{Im}\varphi \implies P = O_E$.

Ainsi $E = \ker \varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 6.

a) On obtient :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L3 \leftarrow L_3 - L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang maximal 3 ; donc $\mathcal{B}'$ est une base.

c)

$$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul d'inversion donne :

$$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On a $A' = P^{-1}AP$; le calcul donne :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e) Alors $(A')^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et $A^n = P(A')^n P^{-1}$; le calcul donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 3^n \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 1 + 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

a) Un calcul classique nous donne $\ker f = Vect((1,1,1,1))$ et

$$\mathrm{Im}\varphi = Vect((1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,-1,-1,-1))$$

b) On obtient par le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = O_4$$

La matrice est nilpotente d'indice de nilpotence 4. c) On a d'abord $f^3(e_1) = (1,1,1,1) \neq O_E$.

Montrons que la famille est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 f^2(e_1) + \lambda_4 f^3(e_1) = O_E \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_1 f^3(e_1) = O_E \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{en composant par } f^3 \\
&\Longrightarrow \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 f^2(e_1) + \lambda_4 f^3(e_1) = O_E \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_2 f^3(e_1) = O_E \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \quad \text{en composant par } f^2 \\
&\Longrightarrow \lambda_3 f^2(e_1) + \lambda_4 f^3(e_1) = O_E \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_3 f^3(e_1) = O_E \Longrightarrow \lambda_3 = 0 \quad \text{en composant par } f \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_4 f^3(e_1) = O_E \Longrightarrow \lambda_4 = 0
\end{aligned}$$

C'est une famille libre de cardinal 4 dans un ev de dimension 4, c'est donc une base.

d) Par définition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

a) Puisque $u^{p-1} \neq O_{\mathscr{L}(E)}$, $\ker u^{p-1}$ est strictement inclus dans E : $\ker u^{p-1} \subsetneq E$, et donc il existe $a \in E \setminus \ker u^{p-1}$, c'est à dire tel que $u^{p-1}(a) \neq O_E$.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a + \lambda_2 u(a) + \lambda_3 u^2(a) + \cdots + \lambda_p u^{p-1}(a) = O_E \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_1 \underbrace{u^{p-1}(a)}_{\neq O_E} = O_E \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{en composant par } u^{p-1} \\
&\Longrightarrow \lambda_2 u(a) + \lambda_3 u^2(a) + \cdots + \lambda_p u^{p-1}(a) = O_E \\
&\qquad \Longrightarrow \lambda_2 u^{p-1}(a) = O_E \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \quad \text{en composant par } u^{p-2} \\
&\qquad \textit{etc...} \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0
\end{aligned}$$

c) Puisque la famille est libre et constitué de p vecteurs dans un ev de dimension n, nécessairement $p \leqslant n$.

Exercice 9.

– Sens direct. Supposons que $w = v \circ u$ est un isomorphisme. Alors d'abord w est surjective et injective et donc v est surjective et u est injective (par une propriété bien connue).

Il reste à montrer que $F = \ker v \oplus \mathrm{Im} f$.

?$\ker v \cap \mathrm{Im} u = \{O_E\}$?.

Soit $y \in \ker v \cap \mathrm{Im} u$; alors $y = u(x)$ (pour un certain $x \in E$) et $v(y) = O_G$. Donc

$$v \circ u(x) = O_G = w(x) \Longrightarrow x = O_E \text{ (puisque } w \text{ est injective)} \Longrightarrow y = O_F$$

? $F = \ker v + \mathrm{Im} u$?

Soit $y \in F$; alors $v(y) \in G$; mais puisque w est surjective, il existe $x \in E$ tel que $v(y) = w(x) = v \circ u(x)$ et donc :

$$v(y) = v(u(x)) \Longrightarrow v(y - u(x)) = O_G \Longrightarrow y = \underbrace{y - u(x)}_{\in \ker v} + \underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im} u} \in \ker v + \mathrm{Im} u.$$

Sens réciproque. Supposons u injective, v surjective et $F = \ker v \oplus \mathrm{Im} u$.

Montrons que w est injective. Soit $z \in G$; puisque v est surjective il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$. Mais puisque $F = \ker v + \mathrm{Im} u$:

$$\exists y_0 \in \ker v, \exists y_1 \in \mathrm{Im} u,\ y = y_0 + \underbrace{y_1}_{= u(x_1)}$$

Ainsi
$$z = v(y) = v(y_0 + y_1) = v(y_0) + v(y_1) = v(y_1) = v(u(x_1)) = w(x_1)$$

Ceci montre que w est surjective.

Montrons l'injectivité de w. Soit $x \in \ker w$; alors

$$v \circ u(x) = O_G \Longrightarrow u(x) \in \ker v \cap \mathrm{Im} u \Longrightarrow u(x) = \{O_F\} \underset{u \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x = O_E$$

Ainsi w est injective.

Exercice 10. Puisque $f^2 \neq O_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\ker f^2 \subsetneq E$ et donc il existe un vecteur $a \in E \setminus \ker f^2$.

Considérons la famille $(a, f(a), f^2(a))$. Le même argument qu'à l'exercice 8 (ou 7) montre que la famille est libre ; c'est donc une base puisque $\dim E = 3$. Dans cette base la martice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Montrons que $f \circ f = f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x,y,z) - (x+y+z, -x-y-z, x+y+z) = (-y-z, x+2y+z, -x-y) \\
f^2(x,y,z) &= (-y-z, x+2y+z, -x-y) + 0.u = f(x,y,z)
\end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = f$, donc f est un projecteur sur $\mathrm{Im} f = \ker(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker f$.

Il nous reste à préciser ces deux sous-espaces.

$$(x,y,z) \in \ker f \iff \left\{ \begin{aligned} -y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} z &= -y \\ x &= -y \end{aligned} \right.$$

Ainsi $\ker f$ est la droite vectorielle $Vect((1,-1,1))$.

$$(x,y,z) \in \ker(f - \mathrm{id}_E) \iff \left\{ \begin{aligned} -y-z &= x \\ x+2y+z &= y \\ -x-y &= z \end{aligned} \right. \iff x+y+z = 0$$

Ainsi $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ est le plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$. On vérifie immédiatement que c'est aussi $Vect((1,-1,0),(0,1,-1))$.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.

Procédons par analyse et synthèse (surtout pour montrer que $E = E_1 + E_2 + E_3$).

Analyse. Soit $x \in E$ tel que $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec :

$$x_1 \in E_1 = \ker f, \quad x_2 \in E_2 = \ker(f + \mathrm{id}_E), \quad x_3 \in E_3 = \ker(f - 2\mathrm{id}_E)$$

Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & x \\ -x_2 + 2x_3 & = & f(x) \\ x_2 + 4x_3 & = & f \circ f(x) \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & x \\ -x_2 + 2x_3 & = & f(x) \\ 6x_3 & = & f(x) + f^2(x) \end{array}\right.$$

dont on déduit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f^2(x) \\ x_2 & = & -\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f^2(x) \\ x_3 & = & \frac{1}{6}(f(x) + f^2(x)) \end{array}\right.$$

(Remarquons que ceci montre déjà que la somme est directe puisque x_1, x_2, x_3 sont uniquement déterminés par la donnée de x.)

Synthèse. Soit $x \in E$, posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f^2(x) \\ x_2 & = & -\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f^2(x) \\ x_3 & = & \frac{1}{6}(f(x) + f^2(x)) \end{array}\right.$$

Alors d'une part bien sûr, $x = x_1 + x_2 + x_3$ (comme le montre le calcul précédent) ; il s'agit de montrer que $x_1 \in \ker f$, $x_2 \in \ker(f + \mathrm{id}_E)$ et $x_3 \in \ker(f - 2\mathrm{id}_E)$.

$$f(x_1) = f(x) + \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^3(x) = f(x) + \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(x) - f(x) = O_E$$
$$\implies x_1 \in \ker f = E_1.$$
$$f(x_2) = -\frac{2}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}f^3(x) = -\frac{2}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}f^2(x) + \frac{2}{3}f(x) = -\frac{1}{3}f^2(x) + \frac{2}{3}f(x) = -x_2$$
$$\implies x_2 \in \ker(f + \mathrm{id}_E) = E_2$$
$$f(x_3) = \frac{1}{6}f^2(x) + \frac{1}{6}f^3(x) = \frac{1}{6}f^2(x) + \frac{1}{6}f^2(x) + \frac{1}{3}f(x) = \frac{1}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}f(x) = 2x_3$$
$$\implies x_3 \in \ker(f - 2\mathrm{id}_E) = E_3$$

Ce qui montre que ces x_1, x_2, x_3 conviennent.
(Remarquons qu'on a en fait démontré ici que $E_1 + E_2 + E_3 = E$ puisque tout $x \in E$ peu s'écrire comme une telle somme).

Exercice 23.

Première méthode

On a facilement :

$$F_0 = Vect(\underbrace{(X-1)(X-2)}_{=P_0}) \qquad F_1 = Vect(\underbrace{X(X-2)}_{=P_1}) \qquad F_2 = Vect(\underbrace{X(X-1)}_{=P_2})$$

En particulier $\dim F_0 = \dim F_1 = \dim F_2 = 1$.

Montrons d'abord que la somme de F_0, F_1 et F_2 est directe.

Soient $f_0 = a_0P_0, f_1 = a_1P_1, f_2 = a_2P_2 \in F_0 \times F_1 \times F_2$ tels que $f_0 + f_1 + f_2 = O_{\mathbb{R}[X]}$.

En particulier en évaluant le polynôme en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ on obtient :

$$2a_0 = -a_1 = 2a_2 = 0 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0 \implies f_0 = f_1 = f_2 = O_{\mathbb{R}_2[X]}$$

ce qui montre que la somme est directe.

Il reste à montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$; cela découle du fait que $F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ de même dimension : $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 = \dim F_0 + \dim F_1 + \dim F_2$.

Deuxième méthode.

On reconnaît pour P_0, P_1, P_2 des multiples des polynômes de Lagrange associés aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, plus précisément : $P_0 = 2L_0$, $P_1 = -L_1$ et $P_2 = 2L_2$. Or on sait qu'ils forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ il découle alors immédiatement que $Vect(P_0)$, $Vect(P_1)$ et $Vect(P_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24. (Esquisse)

a) Très facile (...).

b) Montrons d'abord que la somme est directe : Soient $(f_1, f_2, f_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$ et telles que $f_1 + f_2 + f_3 = O_E$. Alors :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = f_2(x) + c \implies f_2(x) = -c$$

$$\forall x \in [-1,0] \quad 0 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = f_1(x) + c \implies f_1(x) = -c$$

et $0 = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) = c$; ainsi : $f_1 = f_2 = f_3 = O_E$. On a donc montré que $E_1 + E_2 + E_3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$; la somme est directe.

Il reste à montrer que $E = E_1 + E_2 + E_3$; ainsi soit $f \in E$, on pose :

$$f_1 : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ f(x) - f(0) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases} \end{array} \in E_2 \text{ car } \lim_{0^+} f(x) - f(0) = 0$$

$$f_3 : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

alors $f_1 \in E_1$ (car $\lim_{0^-} f(x) - f(0) = 0$), $f_2 \in E_2$ (car $\lim_{0^+} f(x) - f(0) = 0$), $f_3 \in E_3$. Or on obtient bien $\forall x \in [-1,1], (f_1 + f_2 + f_3)(x) = 0 + f(x) - f(0) + f(0) = f(x)$; ainsi $f = f_1 + f_2 + f_3$.

Exercice 25.
Exercice 26.
Exercice 27.
Exercice 28.
Exercice 29.
Exercice 30.
Exercice 31.

De $A = AB - BA$ on déduit $Tr(A) = Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$; $Tr(A^{p+1}) = Tr(A^p(AB - BA)) = Tr(A^{p+1}B) - Tr(A^pBA) = Tr(A^{p+1}B) - Tr(A^{p+1}B) = 0$.

Exercice 32.
Exercice 33.
Exercice 34.
Exercice 35. S'il existait $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $AB - BA = I_n$, alors on aurait :

$$Tr(AB - BA) = Tr(I_n) \implies Tr(AB) - Tr(BA) = n \implies 0 = n$$

C'est donc impossible.