Exercice 1. Nature de $\sum u_n$ (Éléments de correction).

(a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

(b) $u_n = \dfrac{n}{\cos^2(n)}$; u_n est bien défini car $\cos^2(n)$ puisqu'un entier ne peut pas être congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. De $\cos^2(n) \leqslant 1$ on déduit $u_n \geqslant \frac{1}{n}$; d'où la divergence de $\sum u_n$ par comparaison de séries à termes positifs.

c) $u_n = \dfrac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}e^n}{\frac{1}{2}e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-n}$; or $e^{-n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $n^2e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. D'où la convergence de la série $\sum u_n$ (On pourrait aussi appliquer une comparaison série/intégrale puisque $x \longmapsto e^{-x}$ est positive décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$).

d) $u_n = \frac{n!}{(-2)^n}$; il y a divergence grossière puisque :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n} \geqslant \frac{n!}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; un développement asymtotique donne :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\underset{+\infty}{=} \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} e \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\underset{+\infty}{=} \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}
\end{aligned}$$

d'où la divergence par comparaison de série à termes positifs.

(f) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2\ln^3 n}$; $\sum u_n$ converge d'après le TSSA puisque $x \longmapsto x^2\ln^3 x$ est croissante (par produit et composition de fonctions croissante) et donc u_n tend vers 0 en décroissant.

(g) $u_n = \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$; on reconnait une série de Bertrand convergente (avec $\alpha = 3/2$ et $\beta = -1$)... Mais puisque c'est HP, il faut redémontrer la convergence dans ce cas (voir méthode exposée en cours).

On montre que $u_n = o\left(\frac{1}{n\gamma}\right)$ avec $\gamma < \frac{3}{2}$ (pour que ce soit vrai, par CC) et $\gamma > 1$ pour que le terme de droite soit celui d'une série convergente. Ici $\gamma = \frac{5}{4}$ convient. D'où la convergence.

(h) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$; d'où la convergence par comparaison avec une série de Riemann.

(i) $u_n = \frac{1}{n}(2 - \sqrt[n]{3})^n$;

$$u_n = \frac{1}{n}\exp(n\ln(2 - \sqrt[n]{3}))$$

De $\sqrt[n]{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ on déduit : $\ln(2 - \sqrt[n]{3})) \underset{+\infty}{\sim} 1 - \sqrt[n]{3}$; or :

$$\sqrt[n]{3} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(3)\right) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\ln(3) + o\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow 1 - \sqrt[n]{3} \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n}\ln(3) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc $n\ln(2 - \sqrt[n]{3}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(3)$. Ainsi $(2 - \sqrt[n]{3})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n} > 0$; ainsi la série diverge par comparaison de séries à termes positifs.

(j) $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On effectue un développement asymptotique à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
\Longrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{4!} + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right) \\
&\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4!n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
\Longrightarrow u_n &\underset{+\infty}{=} \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{7}{24n^2} > 0
\end{aligned}$$

d'où la convergence de $\sum u_n$ par comparaison avec une série de Riemann.

(k) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$; on applique le théorème spécial des séries alternées pour montrer la convergence de $\sum u_n$; il sagit donc de montrer que $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers 0 en décroissant.

Limite nulle : à l'aide de la formule de Stirling :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n!)} = e^{-\frac{1}{n}\ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}(1+o(1))\right]} = \underbrace{e^{-\ln\left(\frac{n}{e}\right)}}_{\longrightarrow 0} \times \underbrace{e^{-\frac{\ln(\sqrt{2\pi n})}{n}}}_{\longrightarrow 1} \times \underbrace{e^{\ln(1+o(1))}}_{\longrightarrow 1} \underset{n\to=\infty}{\longrightarrow} 0$$

Décroissance (à partir d'un certain rang) :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(n!)}}{e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)!}} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln(k) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\ln(k)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{n(n+1)}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - nln(n+1)}_{<0 \text{ par croissance de ln}}\right)\right) < 1$$

Le théorème s'applique ; d'où la convergence.

(l) $u_n = \dfrac{3\times 6\times\cdots\times(3n)}{n^n} = \dfrac{3^n n!}{n^n}$; d'après Stirling :

$$u_n \sim \left(\frac{3}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \longrightarrow +\infty$$

puisque $e < 3$. Il y a donc divergence grossière.

(m) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}}$$

on multiplie numérateur et dénominateur par le radical conjugué :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n^4-1}\times(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

d'où la convergence par comparaison avec une série de Riemann.

(n) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$u_n = \exp\left(-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$\Longrightarrow -n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\Longrightarrow u_n = e^{-n}\times e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim e^{-n}\times e^{\sqrt{e}}$$

or $e^{-n}\times e^{\sqrt{e}}$ est le T.G. d'une série positive convergente, puisque série géométrique de raison $\frac{1}{e}$. D'où la convergence de $\sum u_n$.

(o) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; on a

$$u_n = e^{-\ln(n)\ln(\ln(n))} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$$

et puisque $\ln(n) \longrightarrow +\infty$, pour n suffisament grand $\ln(\ln(n)) \geqslant 2$ et donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Donc la série converge par comparaison avec une série de Riemann.

(p) $u_n = \sin\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right)$; on procède à la division euclidienne du polynôme n^3+1 par n^2+1 :

$$n^3+1 = n(n^2+1) - n + 1$$

ainsi :

$$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1-n}{n^2+1}\pi\right) = (-1)^{n+1}\times\sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)$$

Un développement asymptotique donne alors :

$$u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n^2+1}\pi + o\left(\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)^2\right)$$
$$u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n^2+1}\pi + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le deuxième terme (en o) est celui d'une série absolument convergente (par comparaison avec Riemann), et le premier celui d'une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, et donc convergente, puisque : $\frac{n-1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ a pour dérivée $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ qui est < 0 pour x suffisamment grand.
On en conclut que $\sum u_n$ converge.

(q) $u_n = \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^2}$; on peut faire une comparaison série intégrale, puisque $x \longmapsto \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))^2}$ est décroissante et positive pour $x > 1$ (par produit et composition de fonctions croissantes $x \longmapsto x$ et ln, puis composition avec la fonction inverse qui est décroissante) : $\sum u_n$ a même nature que :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln(\ln x))^2}$$

or par primitivation on détermine que cette intégrale converge :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln(\ln x))^2} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{-2}{\ln(\ln x)}\right]_2^A = \frac{2}{\ln(\ln 2)}$$

Ainsi la série converge.

(r) Un développement asymptotique donne :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \underbrace{-\frac{1}{2n}}_{T.G. \sum \text{dvge}} + \underbrace{\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{T.G. \sum \text{cvge}}$$

Ainsi $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2. Éléments de correction.
$u_n = (n\sin(1/n))^{n^2}$.
(a) On a :

$$n^2\ln(n\sin(1/n)) \underset{+\infty}{\sim} n^3\sin(1/n) - n^2 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$$

Par composition des limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1/6} = \ell$.
(b) Un développement asymptotique donne (après calcul..)

$$\begin{aligned} n^2\ln(n\sin(1/n)) &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{6} + \frac{32}{2\times 6^2\times 5!}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ u_n &\underset{+\infty}{=} e^{-\frac{1}{6}}\times\left(1 + \frac{32}{2\times 6^2\times 5!}\times\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ u_n - \ell &\underset{+\infty}{=} e^{-\frac{1}{6}}\times\frac{32}{2\times 6^2\times 5!}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

d'où la convergence absolue et donc la convergence de $\sum u_n$ par comparaison avec une série de Riemann.

Exercice 3. Éléments de correction.

(a) L'application de la formule de Stirling donne :

$$u_n = \binom{2n}{n}\alpha^n \sim \frac{(4\alpha)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

d'où la convergence ssi $\alpha < \frac{1}{4}$:
– Si $\alpha < \frac{1}{4}$, $\sum u_n$ converge par comparaison avec la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
– Si $\alpha = \frac{1}{4}$, $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ qui diverge par comparaison avec une série de Riemann.
– Si $\alpha > \frac{1}{4}$, il y a divergence grossière (par croissance comparée d'une suite géométrique divergente et d'une puissance).

(b) $u_n = e^{-n^\alpha}$.
– Si $\alpha = 0$, $u_n = \frac{1}{e}$ et il y a divergence grossière.
– Si $\alpha < 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$; il y a encore divergence grossière.
– Si $\alpha > 0$ alors par croissance comparée :

$$n^{\alpha+1}e^{-n^\alpha} = (n^\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha}}\, e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ avec $\alpha+1>1$: il y a donc convergence par comparaison avec une série de Riemann.
Ainsi $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 0$.

(c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$. (Série de Bertrand)
Il y a convergence de $\sum u_n$ ssi $\alpha > 1$; en effet :
– Si $\alpha \leqslant 1$, à partir d'un certain rang u_n est plus grand que $\frac{1}{n^\alpha}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. D'où la divergence par comparaison.
– Si $\alpha > 1$ alors soit δ tel que $1 < \delta < \alpha$; par croissance comparée :

$$n^\delta u_n = \frac{\ln n}{n^{\alpha-\delta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $\alpha - \delta > 0$. Ainsi $u_n = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$ avec $\delta > 1$. La série $\sum u_n$ convderge donc par comparaison avec une série de Riemann convergente.

(d) $u_n = \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$.
– Si $\alpha \leqslant 1$; pour $n \geqslant 3 > e$ on a $\ln(n) > 1$ et donc $\ln(n)^\alpha \leqslant \ln(n)$

$$\implies -\ln(n)^\alpha \geqslant -\ln(n) \implies u_n \geqslant \exp(-\ln n) = \frac{1}{n}$$

la série $\sum u_n$ diverge par comparaison avec une série de riemann (série harmonique) divergente.

– Si $\alpha < 1$ alors :

$$u_n = \frac{1}{\exp((\ln n)^\alpha)} = \frac{1}{\exp(\ln n \times (\ln n)^{\alpha-1})} = \frac{1}{n^{(\ln n)^{\alpha-1}}}$$

Or puisque $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\alpha - 1 > 0$, à partir d'un certain rang $(\ln n)^{\alpha-1} \geqslant 2$ et donc $u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$. La série $\sum u_n$ converge par comparaison avec la série de Riemann.

(e) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. Nécessairement $\alpha > 0$ sinon la suite n'est pas définie.

<u>Attention</u> : l'erreur courante consisterait à raisonner sur l'équivalent $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ de u_n qui est T.G. d'une série convergente d'après le TSSA. En effet, les séries n'étant pas à termes positifs, elles n'ont aucune raison d'avoir même nature bien que leur T.G. soient équivalents.

On effectue un développement asymptotique (ici !) jusqu'au premier terme de signe constant :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{T.G. de } \sum \text{ cvge} \\ (TSSA)}} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{\sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}}$$

Le premier terme est celui d'une série convergente d'après le TSSA ; le second terme est celui d'une série à terme positif qui converge ssi $2\alpha > 1$ ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

Ainsi $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

(Remarque : on voit bien sur cet exemple que des séries à termes généraux équivalents n'ont pas forcément même nature lorsqu'ils ne sont pas de signe constant.)

Exercice 4. En appliquant la formule de Stirling :

$$u_n = \frac{n^{np}}{(np)!} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{e}{p}\right)^{np} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi np}}$$

On vérifie alors que $\sum u_n$ converge ssi $\left(\frac{e}{p}\right)^p < 1$ c'est à dire ssi $p \geqslant 3 > e$ (car p entier).

En effet :

• Si $q = \left(\frac{e}{p}\right)^p < 1$ alors par croissance comparée :

$$n^2 \times \left(\left(\frac{e}{p}\right)^p\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2\pi np}} \underset{+\infty}{=} O\left(n^{3/2} q^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc $\sum u_n$ converge par comparaison avec une série de Riemann.

• Si $q \geqslant 1$ alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} O\left(\left(\frac{e}{p}\right)^{np} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi np}}\right)$$

et donc $\sum u_n$ diverge par comparaison avec la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5. Éléments de correction.

En posant $u_n = \frac{\cos n}{2^n}$ et $v_n = \frac{\sin n}{2^n}$, on a $u_n + \mathrm{i}v_n = \left(\frac{e^{\mathrm{i}}}{2}\right)^n$; or $\left|\frac{e^{\mathrm{i}}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, ainsi $\sum u_n + \mathrm{i}v_n$ est une série géométrique convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \mathrm{i}v_n) = \frac{2}{2 - e^{\mathrm{i}}} \underset{(*)}{=} \frac{4 - 2\cos(1) + 2\mathrm{i}\sin(1)}{5 - 4\cos(1)}$$

La convergence de cette série à termes complexes, équivaut à la convergence des séries de ses parties réelles et imaginaires, c'est à dire $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement ; de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \mathrm{i}v_n)\right) = \frac{4 - 2\cos(1)}{5 - 4\cos(1)}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \mathrm{i}v_n)\right) = \frac{2\sin(1)}{5 - 4\cos(1)}$$

((*) qu'on a obtenu en écrivant $\frac{2}{2-e^{\mathrm{i}}}$ sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué $2 - e^{-\mathrm{i}}$ du dénominateur).

Exercice 6. $u_n = (1 + 2 + \cdots + n)^{-\alpha}$.

$$u_n = (1 + 2 + \cdots + n)^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln \sum_{k=1}^n k} = e^{-\alpha \ln \frac{n(n+1)}{2}}$$

On peut obtenir un équivalent soit par un développement asymptotique, soit en utilisant le fait élémentaire que :

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff e^{u_n - v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

or :

$$\ln \frac{n(n+1)}{2} - \ln \frac{n^2}{2} = \ln \frac{n(n+1)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\alpha \ln \frac{n^2}{2}} = \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$$

et donc par comparaison de série à termes positifs, $\sum u_n$ converge ssi $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Éléments de correction.

a) On est présence d'une série géométrique convergente :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{5\times 3^n}{7\times 2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{10}{7}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{30}{7}$$

b) La série télescope après avoir appliqué la formule de linéarisation $\sin p \cos q = \frac{1}{2}\left(\sin(p+q)+\sin(p-q)\right)$:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{n-1}} - \sin\frac{1}{2^n}\right) \\ \Longrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sin(2) \qquad \text{car } \sin\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

c) On effectue une décomposition en élément simple puis un calcul (et convergence) par télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{n^3-n} &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}}_{=a_n} - \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}}_{=a_{n+1}} \\ \Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3-n} &= a_2 = \frac{1}{4} \qquad \text{car } a_n \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

d) On procède encore par télescopage, en factorisant les polynômes et en utilisant les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) &= \ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(n)-\ln(n+3) \\ &= \underbrace{\ln(n+2)-\ln(n)}_{a_n} - \underbrace{(\ln(n+3)-\ln(n+1))}_{a_{n+1}} \\ \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) &= a_1 = \ln\frac{3}{2} \qquad \text{car } a_n \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(Remarque : la convergence est assurée chaque fois du fait que (a_n) converge ; sa limite n'a pas besoin d'être égale à 0, même si ici c'et le cas.)

Exercice 8. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$; quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 1}(\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2))$?

D'abord $u_n = (\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)) = \ln\left(n(n+1)^a(n+2)^b\right)$; ensuite :

$$\begin{aligned} n(n+1)^a(n+2)^b \underset{+\infty}{\sim} n^{a+b+1} &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a+b+1>0 \\ 1 & \text{si } a+b+1=0 \\ 0 & \text{si } a+b+1<0 \end{cases} \\ \Longrightarrow u_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a+b+1>0 \\ 0 & \text{si } a+b+1=0 \\ -\infty & \text{si } a+b+1<0 \end{cases} \end{aligned}$$

par composition des limites ; ainsi dès que $a+b+1\neq 0$, il y a divergence grossière de la série.

Il reste à étudier la nature de la série lorsque $a+b+1=0$; on pose alors $a=-(1+b)$, ainsi :

$$u_n = \ln(n)-(1+b)\ln(n+1)+b\ln(n+2) = \underbrace{\ln(n)-b\ln(n+1)}_{a_n} - \underbrace{(\ln(n+1)-b\ln(n+2))}_{a_{n+1}}$$

la somme téléscope :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{N-1} u_n = \sum_{n\geqslant 1}^{N-1} a_n - a_{n+1} = a_1 - a_N = -b\ln(2) - \ln\left(\frac{N}{(N+1)^b}\right)$$

et donc la série a même nature que la suite $a_n = \ln\left(\frac{n}{(n+1)^b}\right)$; elle converge donc si et seulement si $\frac{n}{(n+1)^b}$ a une limite finie non nulle ; or :

$$\frac{n}{(n+1)^b} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{b-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } b>1 \\ 1 & \text{si } b=1 \\ +\infty & \text{si } b<1 \end{cases}$$

En conclusion, la série converge si et seulement si $b=1$ et $a=-2$.

Exercice 9. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante et positive, la comparaison série-intégrale montre que la série de terme général :

$$u_k = \frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

converge. Autrement dit la suite de ses sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

converge. Il en va donc de même de la <u>suite</u> de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Remarque : (cf. exo 8 du cours) sa limite est la constante d'Euler $\gamma \approx 0,577$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 10.

a) On a :

$$\tan(u_n) = \frac{1}{n^2+3n+3}$$

et

$$\tan(v_n) = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{n+2-(n+1)}{n^2+3n+2}}{\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}} = \frac{1}{n^2+3n+3} = \tan(u_n)$$

b) On a $u_n \in]-\pi/2, \pi/2[$; on a aussi :

$$\left.\begin{matrix} 0 < \mathrm{Arctan}\frac{1}{n+1} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \mathrm{Arctan}\frac{1}{n+2} < \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \implies v_n = \mathrm{Arctan}\frac{1}{n+1} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{n+2} \in]-\pi/2; \pi/2[$$

Or tan est injective sur $]-\pi/2; \pi/2[$ et donc :

$$\tan(u_n) = \tan(v_n) \implies u_n = v_n$$

Ainsi $u = (u_n) = v = (v_n)$.

c) La somme télescope :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}\frac{1}{N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$$

D'où la convergence et la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 11. Traité en cours dans ses grandes lignes :

(a) Lorsque $\alpha > 1$, en choisissant γ tel que $\alpha > \gamma > 1$, on par croissance comparée $n^\gamma u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ ce qui établit la convergence par comparaison avec une série de Riemann.

(b) Lorsque $\alpha < 1$, par croissance comparée, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\frac{1}{n} = o(u_n)$, d'où la divergence de la série par comparaison avec la série harmonique.

(c) Lorsque $\alpha = 1$, la série a même nature que l'intégrale : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\mathrm{d}t$ or :

$$\int_2^N \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(t)}\right]_2^N$$

qui a une limite finie lorsque $N \to +\infty$ ssi $\beta - 1 > 0$. Ainsi lorsque $\alpha = 1$, la série converge ssi $\beta > 1$.

Exercice 12. Dans les 3 cas la convergence s'obtient par comparaison de séries à termes positifs :

- $0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$; or $\sum u_n + v_n$ converge.
- $0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \max(u_n, v_n)$; or $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
- $0 \leqslant \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant u_n$ puisque $u_n + v_n \geqslant v_n$: or $\sum u_n$ converge.

Exercice 13. (Exercice difficile).

$(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$.

a) Convergence de $\sum v_n$: on a

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)} = \frac{1+u_n-1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)} - \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$$

donc la série télescope :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} v_n = 1 - \frac{1}{\prod_{k=0}^{N}(1+u_k)} \qquad (*)$$

qui converge quand $N \to +\infty$ puisque la suite $\left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{N}(1+u_k)}\right)_N$ est décroissante et minorée.

(b) Supposons que $\sum u_n$ diverge.

Remarquons que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ ont même nature ; en effet :

– Si $u_n \longrightarrow 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et ça découle du théorème de comparaison puisque $u_n \geqslant 0$.

– Si $u_n \not\longrightarrow 0$ alors $\ln(1+u_n) \not\longrightarrow 0$: car si $\ln(1+u_n) \longrightarrow 0$ alors $u_n \longrightarrow e^0 - 1 = 0$. Ainsi dans ce cas les deux séries divergent grossièrement.

Ainsi $\sum \ln(1+u_n)$ diverge, et donc puisque $\ln(1+u_n) \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(1+u_n) = +\infty$.

Or

$$\sum_{n=0}^{N} \ln(1+u_n) = \ln\left(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Par composition des limites : $\displaystyle\prod_{n=0}^{N}(1+u_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En particulier d'après $(*)$: $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$.

Exercice 14. Éléments de correction.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, par croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$, puis par croissance de l'intégrale :

$$\sqrt{k} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{k+1} \implies \sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{t}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k+1}$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, et en appliquant Chasles (et un changement d'indice à droite) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} \leqslant \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

ce qui permet (divise terme à terme par $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$ avant d'appliquer le théorème des gendarmes) d'en déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

(b) Ici on peut appliquer l'équivalent obtenu par comparaison série intégrale :

La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est positive et décroissante pour $x \geqslant 3 > e$ puisque :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{p\geqslant 3} \frac{\ln(p)}{p}$ a même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$, qui diverge $\Big($par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x\Big)$.

Or on sait par comparaison série-intégrale qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \int_2^n \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x + L + o(1) = \int_2^n \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x + O(1)$$

et donc par divergence :

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(2) \sim \frac{1}{2}\ln^2(n)$$

(le calcul de l'intégrale s'obtient facilement par IPP, ou par primitivation de $u'u$).

(c) Ici on cherche une équivalent du reste d'ordre $n-1$ de la série convergente $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$:

$$R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On procède encore de la même façon :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant \frac{1}{t^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^3}$$

mais on somme les inégalités de n jusqu'à N

$$\implies \forall n \leqslant N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^N \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3}$$

puis par convergence on passe à la limite quand $N \to +\infty$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

qui fournit l'équivalent :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Exercice 15. Traités en cours, page 6.

Exercice 16.

(a) Par une récurrence immédiate, la suite (a_n) est bien définie et à termes > 0. Ainsi la série est alternée.

De l'inégalité de convexité $\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) \leqslant x$ (car $x \longmapsto \ln(1+x)$ étant concave, sa courbe est située sous sa tangente en 0), on déduit que (a_n) est décroissante. Étant décroissante et minorée elle converge vers $l \in \mathbb{R}_+$; et puisque la fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$, l est un point fixe de la fonction de récurrence : $l = \ln(1+l)$. Il est facile de vérifier (par exemple en étudiant les variations de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$) que nécessairement $l = 0$.

On peut donc appliquer le TSSA : la suite $|(-1)^n a_n| = a_n$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

(b) Pour calculer un équivalent de $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \ln\left(\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right) \\
\ln(1+a_n) &\underset{+\infty}{=} a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \qquad \text{car } a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n) \\
\implies \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2}a_n + o(a_n) \\
&\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}a_n < 0
\end{aligned}$$

Les séries $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et $\sum -\frac{1}{2}a_n$ étant à termes de signe constant (au moins à partir d'un certain rang pour la première (en fait pour $n \geqslant 0$)), elles ont même nature, et donc par linéarité même nature que $\sum a_n$. Or :

$$\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \sum \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$$

(la somme télescope), et donc $\sum a_n$ a même nature que la suite $\ln(a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$; d'où la divergence de $\sum a_n$.

Exercice 17. Dans chaque cas on reconnaît un produit de Cauchy de séries absolument convergentes. Il est donc aussi (absolument) convergent d'après le théorème fondamental des produits de Cauchy.

(a) Produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$. Converge et a pour somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2(n-p)!} = \frac{e\pi^2}{6}$$

(b) Produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$. Converge et a pour somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}} = e \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2e}{3}$$

(c) Produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ par elle-même. Converge et a pour somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2(n-p)^2} = \frac{\pi^2}{36}.$$

Exercice 18. Le terme général vérifie :

$$(n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$ est le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ par elle-même, qui converge absolument (comme série géométrique de raison < 1). D'où la convergence, ainsi que la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{4}$$