

**Exercice 1.** Soit pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

Soit  $t \mapsto H(t)$  une primitive de  $\theta \mapsto \frac{e^t}{t}$ ; elle existe par continuité de cette dernière application sur  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) = H(x) - H(1)$$

En particulier  $f$  est dérivable (puisque  $H$  l'est) et :

$$f'(x) = H'(x) = \frac{e^x}{x}$$

qui reste  $> 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**b)** La fonction  $g : x \mapsto f(x) - \ln(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables), de dérivée :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

qui reste  $> 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi  $g$  est strictement croissante.

Or  $g(1) = f(1) - \ln(1) = 0$ . Donc :

- sur  $]0, 1[$ ,  $g(x) < 0$ .
- sur  $]1, +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

**c)** En particulier, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$x \geq 1 \implies f(x) \geq \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \leq 1 \implies f(x) \leq \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

**Exercice 2. a)** La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ; sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions continues et en  $x = 0$  car :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = e^{-x} \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = \varphi(0)$$

Donc  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

Quant à sa parité :  $\mathbb{R}$  est symétrique par rapport à 0 et grâce au changement de variable  $u = -t$  ( $du = -dt$ ) :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t) dt = \int_x^{2x} -\varphi(-u) du = - \int_x^{2x} \varphi(u) du = -f(x)$$

la fonction  $\varphi$  étant paire comme quotient de fonctions impaires. Ainsi  $f$  est impaire.

**b)** Puisque  $\varphi$  est continue, soit  $H$  une de ses primitives,

$$f(x) = H(2x) - H(x)$$

est donc dérivable comme combinaison linéaire de composées de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2\varphi(x) - \varphi(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**c)** La fonction sh étant strictement croissante :

Si  $x > 0$  alors  $x < 2x$  et donc  $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} > 0$ .

Si  $x < 0$  alors  $2x < x$  et donc  $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} > 0$ .

Ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante.

De plus pour  $x \geq 0$ ,  $\forall t \in [x, 2x]$ ,  $\text{sh}(t) \geq \text{sh}(x)$ . On en déduit par croissance et linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt \geq \underbrace{\text{sh}(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_= \\ &\geq \text{sh}(x) \times [\ln(t)]_x^{2x} = \text{sh}(x) \times (\ln(2x) - \ln(x)) = \text{sh}(x) \ln(2) \end{aligned}$$

Et donc par comparaison :  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  puis par imparité  $\lim_{-\infty} f = -\infty$ .

Tout cela nous permet d'obtenir le tableau de variation ;  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.

**Exercice 3.**

**a)**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2} dt = [\ln(1 + t^2)]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + 2t}} dt = [\sqrt{1 + 2t}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p} = \sum_{k=p-n}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

**Exercice 4.** Considérons  $t \mapsto 1 - f(t)$  définie et continue sur  $[a, b]$ ; De plus pour tout  $t \in [0, \pi/2]$  :

$$|f(t)| \leq 1 \implies f(t) \leq 1 \implies 1 - f(t) \geq 0$$

Or :

$$\int_0^{\pi/2} 1 - f(t) dt = \int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} f(t) dt = b - a - (b - a) = 0$$

Or si une fonction positive et continue a une intégrale nulle, elle ne peut être que nulle. Ainsi,  $\forall t \in [0, \pi/2], 1 - f(t) = 0$  c'est à dire  $f(t) = 1$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$ . Montrons que  $f$  admet un point fixe.

Par l'absurde : supposons que  $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq x$ . Par continuité de  $x \mapsto f(x) - x$ , et d'après le TVI :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad f(x) - x > 0, \text{ ou} \\ \forall x \in [0, 1], \quad f(x) - x < 0 \end{aligned}$$

Or  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ , donc  $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 0$ ; par continuité et signe constant de  $x \mapsto f(x) - x$ , nécessairement  $x \mapsto f(x) - x$  est la fonction identiquement nulle sur  $[0, 1]$  : contradiction.

**Exercice 6.**

a) Soit  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ; alors pour  $x = \frac{\pi}{2} - t$ ,  $\cos(x) = \sin(t)$  et  $x \in [0, \pi/2]$ .

b) Par le changement de variable (affine)  $t = \frac{\pi}{2} - x$ ,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x) + \sin(\pi/2 - x)} \times (-dx) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \times (dx) \end{aligned}$$

c) En particulier :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^1 dt = \frac{\pi}{2} \\ \implies I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c) En procédant au changement de variable  $t = \sin(x)$ ;  $dt = \cos(x)dx$  et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1-\sin^2(x)} + \sin(x)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \quad \text{car } \cos(x) \geq 0 \text{ sur } [0, \pi/2] \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**Exercice 7.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . On souhaite montrer que :

$$\int_a^b |f(t)| dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$$

si et seulement si  $f$  est de signe constant.

Posons pour tout  $x \in [a, b], f_+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$  et  $f_-(x) = \min(f(x), 0) \leq 0$ . Ainsi :

$$f = f_+ + f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ - f_-$$

Par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b f_+}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^b f_-}_{\leq 0} \quad \text{et} \quad \int_a^b |f| = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$$

Donc par inégalité triangulaire sur les réels :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b f_+ \right| + \left| \int_a^b f_- \right| = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- = \int_a^b |f|$$

avec égalité si et seulement si  $\int_a^b f_+$  et  $\int_a^b f_-$  sont de même signe. Or puisqu'elles sont de signe opposés, l'égalité a lieu si et seulement si l'une des deux est nulle. Supposons par exemple, sans perte de généralité, que  $\int_a^b f_- = 0$ . Puisque  $f_-$  est de signe constant et

continue (c'est un exercice classique que si  $f, g$  sont continues alors  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  le sont aussi [...]), nécessairement  $f_- = 0$  et donc  $f$  garde un signe constant  $\geq 0$ .

**Exercice 8.**

La fonction  $x \mapsto [x]$  étant continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , les fonction  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  étant continues sur leur ensemble de définition, on en déduit par somme et composée d'applications continues que  $f$  est continue sur  $] -1, 0[ \cup ]0, 1[$ .

Vérifier que  $\lim_{(-1)^+} f = +\infty$  (ou que  $\lim_{0^+} f = +\infty$ ) [...] pour en déduire que  $f$  n'est pas continue par morceau.

**Exercice 9.** Soit  $f$  cpm sur  $[a, b]$ ; ça revient à dire qu'il existe  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  tel que  $f$  soit continue sur chaque intervalle  $]a_k, a_{k+1}[$  et se prolonge par continuité sur  $[a_k, a_{k+1}]$  (où  $k \in [[0, n - 1]]$ ). Il en découle d'après le théorème des bornes atteintes que sur tout segment  $[a_k, a_{k+1}]$ ,  $f$  prolongée par continuité est bornée, et donc  $f$  aussi (puisque au plus deux valeurs différent). Puisque  $[a, b]$  est réunion finie de tels segments,  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

**Exercice 10.** (Éléments de correction.)

a)  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  est cpm sur  $]0, 1[$ . L'intégrale est faussement impropre en 0 puisque  $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$ ; ainsi  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$  converge.

b)  $x \mapsto \text{Arctan} \frac{1}{t} dt$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En 0 :  $\text{Arctan} \frac{1}{t} \xrightarrow{0^+} \frac{\pi}{2}$  donc l'intégrale est faussement impropre en 0.

En  $+\infty$  :  $\text{Arctan} \frac{1}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ ; or  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge.

Ainsi  $\int_0^{+\infty} \text{Arctan} \frac{1}{t} dt$  diverge.

c)  $x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x^2+\sqrt{x}}$  est cpm sur  $]0, 1[$ . De plus  $\frac{x^2+x+1}{x^2+\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; or  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  converge, ainsi par comparaison  $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^2+\sqrt{x}} dx$  converge.

d)  $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En  $+\infty$  :  $\frac{t^2}{e^t-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{e^t} \xrightarrow{+\infty} 0^+$  par croissance comparée; c'est à dire que  $\frac{1}{e^t-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ;

donc par comparaison avec une intégrale de Riemann,  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$  converge.

En 0 :  $\frac{1}{e^t-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$  et donc  $\int_0^1 \frac{dt}{e^t-1}$  diverge.

e)  $t \mapsto \frac{(t-1)}{\ln(t)}$  est cpm sur  $]0, 1[$ . Son intégrale est faussement impropre aux deux bornes; en effet :

$$\frac{(t-1)}{\ln(t)} \xrightarrow{0^+} 0^+ \quad \frac{(t-1)}{\ln(t)} \underset{1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow{1} 1$$

Donc  $\int_0^1 \frac{(t-1)}{\ln(t)} dt$  converge.

f)  $t \mapsto t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+$ . En utilisant le radical conjugué :

$$t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1} = \frac{3}{t + 2 + \sqrt{t^2 + 4t + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3t}$$

Ainsi par comparaison avec une intégrale de Riemann (et par linéarité), l'intégrale diverge.

g)  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^3}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En 0 :  $\frac{\ln(x)}{1+x^3} \underset{0}{\sim} \ln(x) < 0$ ; or  $\int_0^1 \ln(x) dx$  converge ainsi par comparaison  $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$  converge.

En  $+\infty$  :  $x^2 \times \frac{\ln(x)}{1+x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$ , donc  $\frac{\ln(x)}{1+x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ; ainsi par comparaison avec une intégrale de Riemann,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$  converge.

En conclusion,  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$  converge.

h)  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$  est cpm sur  $]0, 1[$ .

Soit  $\alpha$  tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  (par exemple  $\alpha = \frac{3}{4}$ ), alors :

$$x^\alpha \times \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = x^{\alpha-\frac{1}{2}} \ln(x) \xrightarrow{0^+} 0 \quad \text{par croissance comparée puisque } \alpha > \frac{1}{2}$$

et

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{converge car } \alpha < 1$$

D'où la convergence par comparaison avec une intégrale de Riemann.

i)  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}}$  est cpm sur  $]0, 1[$ .

En 0 :  $\frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{0}{\sim} \ln(t) < 0$ ; or  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge donc  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$  converge.

En 1 :  $\frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{1}{\sim} \frac{t-1}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{1}{\sim} -\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$ ; or  $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$  converge (intégrale de Riemann) et donc  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$  converge.

En conclusion  $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$  converge.

j)  $x \mapsto (x+1)e^{-x^2}$  est cpm sur  $\mathbb{R}$ . Or par croissance comparée  $x^2(x+1)e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

donc  $(x+1)e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  et  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$  convergent. D'où la convergence.

k)  $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$  est cpm sur  $\mathbb{R}$ . On a :

$$x^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (\text{à détailler un peu}) \quad \implies \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Ainsi par comparaison l'intégrale converge.

l)  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-t}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En 0 :  $\frac{\sin(t)}{t} e^{-t} \sim 1$  l'intégrale est donc faussement impropre en 0.

En  $+\infty$  :  $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} \right| \leq e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$  et donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} dt$  converge (absolument).

En conclusion l'intégrale converge.

m) La seule borne impropre est en  $+\infty$ . On procède à un développement asymptotique. On obtient (détailler les calculs) :

$$e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \underset{+\infty}{=} \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où la divergence par comparaison avec une intégrale de Riemann au voisinage de  $+\infty$  et par linéarité.

n)  $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$  est cpm sur  $]0, 1]$ ; on a  $\sqrt{t} \sin \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  donc  $\sin(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ . D'où la convergence par comparaison avec une intégrale de Riemann.

o)  $t \mapsto \frac{e^{it}}{1+t^2}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus :

$$\left| \frac{e^{it}}{1+t^2} \right| = \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge; d'où la convergence absolue et donc la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2} dt$ .

p)  $t \mapsto \frac{t+i}{\sqrt{t}} e^{-t}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et :

$$\frac{t+i}{\sqrt{t}} e^{-t} = \sqrt{t} e^{-t} + i \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}$$

En 0 :  $\int_0^1 \sqrt{t} e^{-t} dt$  converge ainsi que  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$  puisque  $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  qui est intégrable sur  $]0, 1]$ .

En  $+\infty$  :  $\sqrt{t} e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ; d'où l'intégrabilité par comparaison avec l'intégrale de Riemann.

**Exercice 11.**

a)  $t \mapsto \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha}$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$  (au moins).

En 0 :  $t - \sin(t) \underset{0}{=} \frac{t^3}{6} + o(t^3) \underset{0}{\sim} \frac{t^3}{6}$  donc :

$$\frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

et donc par comparaison,  $\int_0^1 \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha < 4$ .

En  $+\infty$  :  $\frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$  et donc par comparaison  $\int_1^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha > 2$ .

En conclusion la convergence de l'intégrale a lieu si et seulement si  $2 < \alpha < 4$ .

b)  $t \mapsto t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$  est cpm sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En 0 :  $t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) \underset{0}{\sim} t^\alpha$  et donc par comparaison  $\int_0^1 t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$  converge ssi  $\alpha > -1$ .

En  $+\infty$  :  $t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} t^{\alpha - \frac{1}{2}}$  et donc par comparaison,  $\int_1^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$  converge ssi  $\alpha < -\frac{1}{2}$ .

En conclusion  $\int_0^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$  converge ssi  $\alpha \in ]-1; -\frac{1}{2}[$ .

**Exercice 12.** (Éléments de correction) :

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  : l'intégrande est continue sur  $[0, +\infty[$ ; l'intégrale n'est donc impropre qu'en  $+\infty$ . Elle converge par comparaison avec une intégrale de Riemann car  $\frac{1}{(x+1)(x+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ .

Pour le calcul une décomposition en éléments simples donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = \left[ \ln \frac{x+1}{x+2} \right]_0^{+\infty} = \ln(2)$$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$ ; l'intégrande est continue sur  $[0, 1]$  : l'intégrale est propre.

On a une fonction rationnelle dont le trinôme au dénominateur a un discriminant  $< 0$  :

on applique la forme canonique du trinôme pour faire apparaître  $\frac{u'}{1+u^2}$  : (après calculs)

$$\frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2} dt$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \operatorname{Arctan} \left( \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

c)  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctant}}{1+t^2} dt$ ; l'intégrande est continue sur  $]; +\infty[$  : donc l'intégrale n'est impropre qu'en  $+\infty$ ; or :

$$0 \leq \frac{\operatorname{Arctant}}{1+t^2} \leq \frac{\operatorname{Arctant}}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{t^2}$$

donc l'intégrale converge par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Pour le calcul, soit on effectue le changement de variable  $x = \operatorname{Arctan}(t)$  pour obtenir  $= \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ , soit l'IPP  $u = \operatorname{Arctan}(t)$  et  $v' = \frac{1}{1+t^2}$  pour obtenir  $I = [\operatorname{Arctan}^2(t)]_1^{+\infty} - I$ ; on obtient dans chaque cas  $I = \frac{3\pi^2}{32}$ .

d)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)}$ ; l'intégrale n'est impropre qu'en  $+\infty$ , mais on obtient :

$$0 < \frac{1}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

d'où la convergence.

Pour le calcul, le changement de variable  $u = e^t$  ( $C^1$  et strictement croissant de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[1, +\infty[$ ) donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \left[ -\frac{1}{1+u} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

e)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx$ ; l'intégrande est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ; l'intégrale n'est donc impropre qu'en  $+\infty$ , mais :  $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . D'où l'intégrabilité et donc la convergence de l'intégrale.

Le changement de variable  $t = \operatorname{sh}(x)$  qui est  $C^1$  et strictement croissant de  $\mathbb{R}_+$  sur lui-même donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

f)  $I = \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ ; on effectue une IPP (en traitant en même temps convergence et calcul).

Sous réserve de convergence; en posant  $u = \ln(1 + \frac{1}{t^2})$  et  $v' = 1$  :

$$I = \underbrace{\left[ t \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{-2}{t^2 + 1} dt = 2 \left[ \operatorname{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty} = \pi$$

g)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$ ; La convergence découle de :

$$\frac{\ln(x)}{(1+x)^2} \underset{0+}{\sim} \ln(x) \in L^1(]0, 1]) \quad \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} o \left( \frac{1}{x^{3/2}} \right) \in L^1([1, +\infty[)$$

Calcul : le changement de variable  $u = \frac{1}{x}$  donne :  $I = -I$  et donc  $I = 0$ . (Attention ici,  $I = -I$  ne donne  $I = 0$  qu'après avoir établi la convergence!!).

h)  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ ; le changement de variable  $C^1$  et strictement croissant  $x = \sqrt{t}$  donne :

$$I = 4 \int_0^1 \ln(x) dx = -4$$

(et en particulier on a la convergence, en même temps que le calcul).

i)  $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ ; On effectue une IPP  $u = \ln(t)$ ,  $v' = t^n$ , pour obtenir, sous réserve de convergence :

$$\int_0^1 t^n \ln(t) dt = \underbrace{\left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2} [t^{n+1}]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

D'où la convergence et le calcul.

j)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x+x^2} dx$ ; après avoir montré la convergence ( $\underset{0+}{\sim} \ln(x)$  et  $\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2} = o(\frac{1}{x^{3/2}})$ ), on effectue le changement de variable  $t = 1/x$  pour obtenir  $I = -I$  et donc

$I = 0$ . (Attention ici, comme au g),  $I = -I$  ne donne  $I = 0$  qu'après avoir établi la convergence!!).

k)  $I = \int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx$ ; le changement de variable  $t = \cos x$  donne (sous réserve de convergence) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 -\ln \sqrt{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[ -(1-t) \ln(1-t) + (1-t) + (1+t) \ln(1+t) - (1+t) \right]_0^1 = 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

d'où convergence et calcul.

l)  $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$ ; le changement de variable  $x = \sqrt{1-t}$  donne (sous réserve de cvgce) :

$$I = 2 \int_0^1 \ln(1-x^2) dx = 2 \left[ -(1-x) \ln(1-x) + (1-x) + (1+x) \ln(1+x) - (1+x) \right]_0^1 = 4 \ln(2) - 4$$

m)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x(1+x)} dx$ ; le changement de variable  $t = \sqrt{1+x}$  donne (s.r.d.c.) :

$$I = 4 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)} dt$$

qui converge (par comparaison avec une intégrale de Riemann,  $\frac{1}{t(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ ), et après décomposition en éléments simples de la fraction :

$$I = 4 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} dt = -4 \ln \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -4 \ln(2 - \sqrt{2})$$

n)  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + i2t)e^{-t^2+it} dt$ . S.r.d.c. :

$$I = -i \left[ e^{-t^2+it} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -i \left[ e^{-t^2} \times (\cos(t) + i \sin(t)) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

o)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} dt$ ;

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t+1)^2} dt = \left[ \text{Arctan}(t+1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

p)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ; le changement de variable  $u = \sqrt{x}$  donne (s.r.d.c.) :

$$I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 2$$

q)  $I = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ ; le changement de variable donne s.r.d.c. :

$$I = - \int_0^1 \ln(u) du = - \left[ u \ln(u) - u \right]_0^1 = 1$$

**Exercice 13.** (Éléments de correction)

a) La fonction  $x \mapsto \ln(\sin(x))$  est continue sur  $]0, \pi/2]$ ; un  $DL_3(0)$  de  $\sin$  donne :

$$\ln(\sin(x)) \underset{0}{=} \underbrace{\ln(x)}_{\in L^1(]0,1])} + \underbrace{\ln(1+x^2/6+o(x^2))}_{\in C^0(]0,1])}$$

d'où la convergence de  $J$ .

b) Il suffit de procéder au changement de variable  $t = \frac{\pi}{2} - x$  dans  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$  pour établir l'égalité avec  $J$ .

c)  $J' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) + \ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t)) dt = 2J + \frac{\pi \ln 2}{2}$ .

d) Le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} + t$  donne :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt = J$$

e) On calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$  avec le changement de variable  $u = 2x$  :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = J \implies J = -\frac{\pi \ln(2)}{2}$$

**Exercice 14.** (Éléments de correction)

a) La convergence de  $I_n$  découle d'une comparaison avec une intégrale de Riemann puisque  $t^n e^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

b) L'IPP  $u = e^{-t^2}$  et  $v' = t^n$  dans  $I_n$  donne :

$$I_n = \underbrace{\left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2} dt = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

c)  $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \left[ e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

d)  $I_0 = \sqrt{\pi}$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2^p} \sqrt{\pi} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2^p} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2p}{2 \times 4 \times \dots \times 2p} \sqrt{\pi} = \frac{(2p)!}{2^p \times 2^p \times p!} \times \sqrt{\pi} \\ I_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

**Exercice 15.**

a) De  $f(t) = e^{it^2} = \cos(t^2) + i \sin(t^2)$  découle  $|e^{it^2}| = 1$  et donc  $f$  est non intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

b) On effectue l'IPP :

$$\begin{cases} v = \frac{e^{iu^2}}{2i} & v' = u e^{iu^2} \\ w = \frac{1}{u} & w' = -\frac{1}{u^2} \end{cases}$$

sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{iu^2} du &= \int_1^{+\infty} \frac{u e^{iu^2}}{u} du \\ &= \left[ \frac{e^{iu^2}}{u 2i} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{e^{iu^2}}{u^2 2i} du \\ &= -\frac{\cos(1) + i \sin(1)}{2i} + \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{iu^2}}{u^2 2i}}_{=O\left(\frac{1}{u^2}\right)} du \end{aligned}$$

d'où la convergence. c) La convergence de  $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$  implique celles de :

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Re}(e^{iu^2}) du = \int_1^{+\infty} \cos(u^2) du \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \operatorname{Im}(e^{iu^2}) du = \int_1^{+\infty} \sin(u^2) du$$

**Exercice 16.** (Éléments de correction)

a) L'IPP  $u' = e^{it}$  et  $v = \frac{1}{t^\alpha}$  donne s.r.d.c. :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \underbrace{\left[ \frac{1}{i} \frac{e^{it}}{t^\alpha} \right]_1^{+\infty}}_{=\frac{e^i}{i}} + \frac{\alpha}{i} \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}}_{=O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)} dt$$

d'où la convergence par comparaison avec une intégrale de Riemann.

b) Le changement de variable  $u = t^2$  donne :

$$\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{1/2}} du$$

dont la convergence découle de celle de  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{1/2}} du$  établie en a).

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t + \cos(t)} &= \frac{1}{t} \times \frac{1}{1 + \frac{\cos(t)}{t}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{t} \times \left( 1 - \frac{\cos(t)}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{t} \sin(t)}{t + \cos(t)} &\underset{+\infty}{=} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \underbrace{\frac{\sin(t) \cos(t)}{t\sqrt{t}}}_{=O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)} + o\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Or l'intégrale du premier terme converge d'après a), et celle des 2 termes suivants par comparaison avec une intégrale de Riemann. D'où la convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(t)}{t + \cos(t)} dt$ .

**Exercice 17.** Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et  $\beta(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$ .

a) La convergence doit être étudiée aux deux bornes 0 et  $+\infty$  :

- En 0 :  $\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-u}} > 0$  et donc  $\int_0^1 \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$  converge ssi  $u > 0$  (par comparaison avec une intégrale de Riemann).

- En  $+\infty$  : Si  $u > 0$  et  $v > 0$  alors  $\int_1^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$  converge car  $\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}$

$\frac{1}{t^{v+1}} > 0$  (par comparaison avec une intégrale de Riemann).

Si  $u > 0$  et  $v \leq 0$  alors  $\int_1^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$  diverge car  $\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \geq \frac{t^{u-1}}{(1+t)^u} \sim \frac{1}{t}$ .

Ainsi  $\beta(u, v)$  converge ssi  $u > 0$  et  $v > 0$ .

b) On établit successivement (i), (ii), (iii) :

(i) Par l'IPP  $f = t^u$ ,  $g' = \frac{1}{(1+t)^{1+u+v}}$  (sous réserve de convergence) :

$$\begin{aligned} \beta(u+1, v) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^u}{(1+t)^{u+v+1}} dt \\ &= \underbrace{\left[ \frac{t^u}{-(u+v)(1+t)^{u+v}} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{u}{u+v} \times \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt \\ &= \frac{u}{u+v} \beta(u, v) \end{aligned}$$

(ii) Par changement de variable  $x = \frac{1}{1+t}$  (bijection  $C^1$  strictement décroissante de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, 1[$ ) :

$$\beta(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{u-1} x^{u+v-2} dx = \int_0^1 (1-x)^{u-1} x^{v-1} dx.$$

(iii) On applique (ii) avec le changement de variable affine  $t = 1 - x$  :

$$\beta(v, u) = \int_0^1 (1-x)^{v-1} x^{u-1} dx = \int_0^1 t^{v-1} (1-t)^{u-1} dt = \beta(u, v)$$

c) (i) Soit  $a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \beta(n+1, a) &= \frac{n}{n+a} \beta(n, a) \\ \implies \beta(n+1, a) &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{(n+a) \times (n-1+a) \times \cdots \times (1+a)} \times \beta(1, a) \\ \text{et } \beta(1, a) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{1+a}} dt = \left[ -\frac{1}{a(1+t)^a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \\ \implies \beta(n+1, a) &= \frac{n!}{(n+a) \times (n-1+a) \times \cdots \times (1+a) \times a} \end{aligned}$$

c)(ii) On applique le changement de variable affine  $x = \frac{t}{n}$  :

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \int_0^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right) n t^{a-1} dt \\ &= \int_0^1 (1-x) n x^{a-1} n^a dx \\ &= n^a \times \beta(n+1, a) \\ I_n(a) &= n^a \times \frac{n!}{(n+a) \times (n-1+a) \times \cdots \times (1+a) \times a} \end{aligned}$$