ENCPB - 2024/25 PC - Maths

# Fiche d'Exercice n°1

Révisions sur les réels et les suites numériques

## I. Nombres réels : équations, inéquations, inégalités, valeurs absolues

**Exercice 1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ :

(a) $(x+1)^2 \leqslant mx$ (b) $\begin{cases} x+y &= m \\ xy &= 1 \end{cases}$

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

(a) $|x-2| = |x+1|$ (b) $|x-4| = x^2 - 1$ (c) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \leqslant 2$

**Exercice 3.** On suppose que : $2 \leqslant |a| \leqslant 4$ et $5 \leqslant |b| \leqslant 6$. Encadrer : $\dfrac{a^2\,|b+1|}{|a-2b|}$.

**Exercice 4.** Démontrer que :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2n+2}{2n+3} \leqslant \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n^n}{n!} \geqslant n$

**Exercice 5.** Soit $x$ et $y$ des réels. Montrer que :

(a) $1 + |xy-1| \leqslant (1+|x-1|)\,(1+|y-1|)$.

(b) $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$.

## II. Partie entière

**Exercice 6.** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ :

(a) Exprimer $\lfloor x+n \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ et $n$.

(b) Exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

**Exercice 7.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

**Exercice 8.** Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ : $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

### III. Bornes supérieures et bornes inférieures

**Exercice 9.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A+B=\Big\{a+b \mid a\in A, b\in B\Big\} \qquad ; \qquad -A=\Big\{-a \mid a\in A\Big\}$$

Établir les relations suivantes :

1. $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$
2. $\sup(-A)=-\inf A$ et $\inf -A=-\sup A$ (on suppose ici $A$ borné)
3. $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$ (on suppose ici $B$ borné)

**Exercice 10.** Déterminer, lorsqu'ils existent, les bornes sup, inf, minimum, et maximum pour des ensembles suivants :

(a) $A=\left\{\dfrac{1}{2n+1} \;\Big|\; n\in\mathbb{N}\right\}$.

(b) $B=\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n \;\Big|\; n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

(c) $C=\left\{\dfrac{1}{p} \;\Big|\; p\in\mathbb{N} \text{ et } p \text{ est premier}\right\}$.

(d) $D=\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m} \;\Big|\; (n,m)\in\mathbb{N}^{*2}\right\}$.

### IV. Suites numériques

**Exercice 11.** Soit $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ pour $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante et en déduire l'inégalité : $\dfrac{1}{(n!)^2}\leqslant\dfrac{4^n}{(2n)!}$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**Exercice 12.** Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_0=0, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+2}=-2u_{n+1}-4u_n$.

**Exercice 13.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.

**Exercice 14.** Soit $(u_n),(v_n)$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim u_nv_n=1$. Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers 1.

**Exercice 15.** (Moyenne de Cesaro)

Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers un réel $\ell$. On considère la suite $(m_n)$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par $m_n=\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$

(a) Soit $\epsilon>0$. Montrer qu'il existe un rang $n_0$ tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$, $|u_n-\ell|\leqslant\frac{\epsilon}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe un rang $n_1$ tel que, pour tout entier $n\geqslant n_1, |m_n-\ell|\leqslant\epsilon$.

(c) Que peut-on dire sur la convergence de $(m_n)$ ?

**Exercice 16.** Soit $(u_n)$ la suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{2n}-u_n\geqslant\frac{1}{2}$. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 17.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $\phi_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\phi_n(x) = x - \ln(x) - n.$$

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, l'équation : $\ln(x) + n = x$ admet deux solutions (que l'on notera $x_n$ et $y_n$ ), avec $x_n \in ]0,1[$ et $y_n \in ]1,+\infty[$.

(b) En considérant $\phi_{n+1}(x_n)$, montrer que $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est une suite décroissante.

(c) Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 2}$ converge.

(d) Monter que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

(e) Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$.

**Exercice 18.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. On note $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

(a) Dresser le tableau de variations de $f$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$.

(c) Montrer que $(u_n)$ est décroissante, puis qu'elle converge.

(d) Déterminer la limite de $(u_n)$.

**Exercice 19.** Soit $(u_n)$ la suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n - \overline{u_n}\right)$. Montrer que $(u_n)$ converge puis déterminer sa limite en fonction de $u_0$. (On pourra étudier les suites $(a_n = \operatorname{Re}(u_n))$ et $(b_n = \operatorname{Im}(u_n))$.

**Exercice 20.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n$ définie sur $[0, \pi/2]$ par $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n$ possède un maximum en un unique point (on le note $x_n$ et $y_n = f(x_n)$).

(b) Trouver un équivalent de $(x_n)$ et de $(y_n)$

**Exercice 21.**

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n$ tel que $u_n^5 + nu_n = 1$

(b) Etudier la monotonie de $(u_n)$. (On pourra comparer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$ )

(c) Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

(d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

**Exercice 22.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle positive $x_n$. Montrer la convergence de $(x_n)$ et déterminer sa limite.