ENCPB - 2024/25 PC - Maths

Fiche d'Exercice n°**14**

Calcul différentiel

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, dérivable, ne s'annulant pas, telle que $\forall t \in I, f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires.
   a) Calculer la dérivée de $u : t \mapsto f(t)/\|f(t)\|$
   b) En déduire que f prend toutes ses valeurs dans une même droite vectorielle.

2. Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   a) Justifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leqslant |y|$. Que peut-on en conclure sur la continuité de f en 0 ?
   b) Etudier les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et $g : (u, v) \mapsto f\left(u^2 + v^2, uv\right)$. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$(x, y) \mapsto \varphi(y/x)$$
   Montrer que f vérifie la relation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf$.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le laplacien de f par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
   On considère $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$F : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
   Montrer que $\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$.

7. Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour (x, y) tel que $x^2 + y^2 < R^2$, on pose $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

8. En utilisant le changement de variable $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = y - x \end{array} \right.$, résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$

9. En utilisant le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$, résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

10. En utilisant le changement de variable $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

11. En passant par les coordonnées polaires, résoudre les équations aux dérivées partielles, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$.
(a) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
(b) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$
(c) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
(d) $y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$

12. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
(a) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ (b) $g : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$

13. Déterminer le maximum sur $K = [0, 1]^2$ de $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

14. Déterminer les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$. (On pourra montrer que l'étude sur le bord revient à étudier la fonction $g : t \mapsto 8\left(1 + \sin(2t) - \sin^2(2t)\right)$)

15. Soit $f : (x, y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$. Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T, puis déterminer sa valeur.

16. Déterminer le maximum sur $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ de $(x, y) \mapsto (\sin x)(\sin y)(\sin(x + y))$