ENCPB - 2024/25 PC - Maths

Fiche d'Exercice n°12

Espaces préhilbertiens - Endomorphismes des espaces euclidiens

I. Produit scalaire

1. (a) Soit $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ à l'aide des coefficients de A et B.
   (b) Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   $$(A,B) \quad \mapsto \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$$
   (c) Montrer que $\forall (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n^2}, \left|\sum_{i=1}^n a_{ii}\right| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Étudier le cas d'égalité.
   (d) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (A_1, A_2, A_3) est libre, puis l'orthonormaliser.
2. (a) Vérifier que $(f,g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la famille $(e_1,e_2,e_3) = \left(t\mapsto 1, t\mapsto t, t\mapsto t^2\right)$ est une famille libre de E.
   (c) Orthonormaliser la famille (e_1,e_2,e_3).
3. On munit $E=\mathcal{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$ du produit scalaire : $(f,g)\mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit $F=\{f\in E \mid f''+f=0\}$ et $x : t\mapsto t$. Déterminer le projeté orthogonal de x sur F.
4. Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^n x_k^2$
5. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan F d'équation cartésienne $x+y+z=0$.
6. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin(t)-at-b)^2 \,\mathrm{d}t$
7. Soit E un espace préhilbertien réel, F,G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Montrer que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
   (b) Montrer que $F\subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
   (c) Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
8. (a) L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \mapsto 4xx'+yy'-2x'y-2xy'$ est-elle bilinéaire symétrique ?
   (b) Est-ce un produit scalaire ?

9. Soit E un espace préhilbertien réel, $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], \|e_i\| = 1$ et $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i \rangle^2$.
Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale de E, puis que c'est une base orthonormée de E.
10. Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application vérifiant : $\forall x, y \in E, \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. Montrer que f est linéaire.
11. Montrer, que pour le produit scalaire défini à l'exercice 1 , les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices (respectivement) symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux sousespaces supplémentaires et orthogonaux.
12. (Polynômes de Tchebytchev) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose, pour $A, B \in E$:

$$\varphi(A, B) = \int_{-1}^{1} \frac{A(t)B(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$$

    (a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.
    (b) Si p et q sont des entiers, calculer $\int_0^\pi \cos(pt)\cos(qt)\mathrm{d}t$.
    (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$.
    (d) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
    (e) En déduire une base orthonormée de E.
13. Soit x, y deux vecteurs d'un espace préhilbertien E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$.
14. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on définit $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
(On pourra le moment venu utiliser l'inégalité $\left(\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{d}t$, après l'avoir justifiée.)
15. Soit E le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si $u, v \in E$, on pose $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$
    (a) Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.
    (b) On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites «presque nulles », i.e. dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer $F^\perp$. F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $\left(F^\perp\right)^\perp$.
16. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose $(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
    (a) Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.
    (b) Calculer $(X^p \mid X^q)$ pour p et q entiers naturels.
    (c) Orthonormaliser la famille $\left(1, X, X^2\right)$ pour ce produit scalaire.

II. Matrices orthogonales et isométries

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $AA^T = A^T A$. Montrer que la matrice $\Omega = \left(A^{-1}\right)^T A$ est orthogonale.
18. Soit $A = (a_{ij}) \in O(n)$. Montrer les inégalités suivantes :
(a) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| \leqslant 1$. (b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$
(On pourra penser au produit scalaire $(B \mid C) = \operatorname{tr}\left(B^T C\right)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)

19. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M = N^T N$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale U telle que $M = UN$.

20. Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$.
    (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp}$.
    (b) En déduire que, si $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.

21. Soit E un espace euclidien, u un vecteur unitaire de E et f l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall x \in E, f(x) = x - 2(x \mid u)u$$
Montrer que f est une isométrie vectorielle de E.

22. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :
    (a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (b) $B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Soit u une isométrie d'un espace euclidien E et $v = u - \mathrm{id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

24. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Soit λ une valeur propre complexe de Ω et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $\Omega X = \lambda X$.
En calculant $(\Omega \bar{X})^T \Omega X$ de deux façons, établir que λ est de module 1.

25. Soit E un espace euclidien, v un vecteur non nul de E, λ un réel non nul. On considère l'endomorphisme f de E défini par $\forall x \in E, f(x) = x + \lambda(x \mid v)v$.
    (a) A quelle condition sur λ et v a-t-on $f \in \mathcal{O}(E)$?
    (b) Si cette condition est réalisée, déterminer les éléments propres de f et interpréter géométriquement.

26. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \sigma = ab + bc + ca, S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
    (a) Montrer que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.
    (b) Monter que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S = 1$.
    (c) Montrer que M est dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

III. Endomorphismes et matrices symétriques

27. Quels sont endomorphismes d'un espace euclidien E qui sont à la fois des isométries et des endomorphismes symétriques ?

28. Soit f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

29. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

30. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini à l'exercice 16 . Soit $\varphi : P \mapsto XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E, symétrique pour ce produit scalaire.

31. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.
    (a) Montrer que $f(x) = x + k(x \mid a)a$ définit un endomorphisme symétrique de E.
    (b) Montrer que f est un automorphisme.
    (c) Justifier que f est diagonalisable. Etudier les valeurs propres et sous-espaces propres de E.
32. (a) Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
    Montrer que la projection p est orthogonale si et seulement si p est symétrique.
    (b) Soit p, q deux projections orthogonales de E. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
33. (a) Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par : $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)$.
    (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-il symétrique pour ce produit scalaire ?
34. Soit f un endomorphisme symétrique de E vérifiant $\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$.
    Déterminer f.
35. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose $k = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$.
    Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.