

1

$$7. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(\cos(nu)) \, du$$

$$\begin{array}{lcl}
 n' & 0 \leq n \leq 1 & \text{also } n^n \rightarrow 0 \\
 n' & n = 0 & \text{A } n^n \rightarrow 0 \\
 n' & n = 1 & \text{II } n^n \rightarrow 1
 \end{array}
 \Rightarrow h(n^n) \rightarrow \begin{cases} \ln(1) = 0 & n \neq 0 \\ \ln(n^n) & n = 1 \end{cases}$$

On a $n \mapsto \ln \cos(2x)$ est constante et donc intégrable sur $[0, 1]$

les intervalles bornés et : (par continuité de la

$$n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{u}{n})}{n} e^{-u} du$$

Graph of $f(x) = \ln(1+x) - x$. The x-axis is labeled with -1 , 0 , and ∞ . The y-axis is labeled with $-\infty$. The curve starts at $(-1, 0)$, goes down to a minimum at $(0, -1)$, and then goes up towards ∞ .

$$\Rightarrow \forall n) -1 \ln(1+n) \leq n$$

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n: u \mapsto \frac{\ln(1+\frac{u}{n})}{u} e^{-u} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$$

$$f_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{qui est } \mathbb{R}^+$$

$$n \geq 0 \quad \ln(1+\frac{u}{n}) \leq \frac{u}{n} \Rightarrow |f_n(u)| \leq \frac{1}{n} e^{-u} \leq e^{-u}$$

$n \mapsto e^{-u}$ sur intervalle sur $\mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \text{Thé de convergence dominée assure que } I_n \text{ est bien définie et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) du = \int_0^{+\infty} 0 du = 0.$$

$$3) \quad n f_n(u) = \frac{n}{u} \ln(1+\frac{u}{n}) e^{-u} \sim e^{-u}$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\text{De plus } |n f_n(u)| \leq e^{-u}$$

$$\Rightarrow \text{TCD} \Rightarrow n I_n \text{ est bien définie et que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{On en déduit que } I_n \sim \frac{1}{n}$$

Exercice)

$$? \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t) dt ?$$

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t). \quad \text{et } f_n(t) = g_n(t) \times \chi_{[0,n]}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t) & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \ln(1+\frac{u}{n}) \leq \frac{u}{n} \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq e^{-t}$$

$$\text{et } \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow e^{-t}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t} \cos(t)$$

$$f_n(t) \leq \underbrace{e^{-t} \cos(t)}_{\in L^1(\mathbb{R}_+)}$$

$$\text{TCD} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$$

$$u = \cos(t) \quad u' = -\sin(t) \\ v = -e^{-t} \quad v' = e^{-t}$$

$$= \left[-e^{-t} \cos(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$$

les cosinus
convergent

$$u = \sin(t) \quad u' = \cos(t) \\ v = -e^{-t} \quad v' = e^{-t}$$

$$= \underbrace{\left[-e^{-t} \cos(t) \right]_0^{+\infty}}_{=1} - \underbrace{\left[-e^{-t} \sin(t) \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim I_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice 4

$$? \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh(t)} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}$$

$$t > 0 \quad \frac{1}{\sinh(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh(t)} dt$$

$$\sinh(t) \sim t + \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$$

$$\Rightarrow \frac{\sinh(t)}{t} = 1 + \frac{t^2}{3!} + o(t^3) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

intégrale

$$\text{en } +\infty \quad \sinh(t) \sim \frac{e^t}{2}$$

donc pour \$t\$ impaire \$n=0\$

$$\Rightarrow \frac{t}{\sinh(t)} \sim 2te^{-t} \text{ intégrable car } o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc l'intégrale converge

$$\frac{t}{\sinh(t)} = \frac{2te^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2te^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-2t}} = 2te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2tn}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2te^{-(2n+1)t}$$

Appliquons à cette série la Thé d'intégration terme à terme.

$$u_n(t) = 2te^{-(2n+1)t}$$

intégrable sur \$\mathbb{R}_+\$ car \$= o\left(\frac{1}{t^2}\right)\$

Se ^{Summe} $\frac{t}{\sinh(t)}$ ist e^0 (per ~~wieder~~) nur $1 \mathbb{R}_+$

$$\int_0^{+\infty} |2t e^{-(2n+1)t}| dt = \int_0^{+\infty} 2t e^{-(2n+1)t} dt$$

$$u = 2t \quad u' = 2 \\ v = -\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1} \quad v' = e^{-(2n+1)t}$$

Wieder
eye

$$= \left[-\frac{2t e^{-(2n+1)t}}{2n+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} dt$$

$$= 0 + \frac{2}{2n+1} \times \left[-\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{(2n+1)^2}$$

consequenz:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2t e^{-(2n+1)t} dt \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

Exercice 5

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\sinh(t)} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(2n+1)^2 + n^2}$$

1) $n - \frac{n^3}{2} \leq \sin(n) \leq n$ (choix de la fonction)

par l'impairité

$$n \leq 0 \Rightarrow$$

$$n \leq \sin(n) \leq n - \frac{n^3}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R}$$

$$|\sin(n)| \leq |n|$$

$$\frac{\sin(nt)}{\sinh(t)} = \frac{2 \sin(nt)}{e^t - e^{-t}} = \frac{e^{-t} \times 2 \sin(nt)}{1 - e^{-2t}}$$

$$\frac{1}{1 - e^{-2t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kt}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(nt)}{\sinh(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \sin(nt) e^{-t} \times e^{-2kt}$$

$$n/t \in \mathbb{R}$$

$$f_n(t) = 2 \sin(nt) e^{-(2n+1)t}$$

φ_0

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \sin(nt) e^{-(2k+1)t}$$

$$t \gg 0 \quad |f_n(t)| \leq 2|n|t e^{-(2n+1)t}$$

intégrable car $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\sum f_n(t) \xrightarrow{s.r} \frac{\sin(nt)}{\sinh(t)}$$

qui est φ_0 (φ_{pm}) sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &\leq \int_0^{+\infty} 2|n| t e^{-(2n+1)t} dt \\
 &= 2|n| \int_0^{+\infty} t e^{-(2n+1)t} dt \\
 &= 2|n| \left(\left[-\frac{t}{(2n+1)} e^{-(2n+1)t} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(2n+1)} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} dt \right) \quad \text{le second age} \\
 &= 2|n| \times \frac{1}{2n+1} \times \left[-\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)t} \right]_0^{+\infty} \\
 &= 2|n| \times \frac{1}{2n+1} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{2|n|}{(2n+1)^2} \Rightarrow \sum |f_n| \Rightarrow \text{converge}
 \end{aligned}$$

$u=t \quad u'=1$
 $v=-\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)t} \quad v'=-e^{-(2n+1)t}$

D'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{m_n(ut)}{\sinh(t)} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2m_n(ut) e^{-(2n+1)t} dt \\
 I &= \int_0^{+\infty} m_n(ut) e^{-(2n+1)t} dt = \left[-\frac{m_n(ut)}{(2n+1)} e^{-(2n+1)t} \right]_0^{+\infty} \rightarrow 0 \\
 &\quad \begin{array}{l} u=m_n(ut) \quad u'=n \cos(ut) \\ v=-\frac{e^{-(2n+1)t}}{(2n+1)} \quad v'=-e^{-(2n+1)t} \end{array} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{+\infty} n \cos(ut) e^{-(2n+1)t} dt \\
 &= \frac{n}{2n+1} \left[\left[-\frac{\cos(ut)}{(2n+1)} e^{-(2n+1)t} \right]_0^{+\infty} - \frac{n}{2n+1} \int_0^{+\infty} \sin(ut) e^{-(2n+1)t} dt \right] \\
 &\quad \begin{array}{l} u=\cos(ut) \quad u'=-n \sin(ut) \\ v=-\frac{e^{-(2n+1)t}}{(2n+1)} \quad v'=-e^{-(2n+1)t} \end{array} \\
 \Rightarrow I &= \frac{n}{(2n+1)^2} - \frac{n^2}{(2n+1)^2} I \Rightarrow I = \frac{n}{(2n+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{n^2}{(2n+1)^2}} \\
 &= \frac{n}{(2n+1)^2 + n^2} \\
 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{m_n(ut)}{\sinh(t)} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{(2n+1)^2 + n^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(t) &= \frac{\ln(ut)}{\sinh(t)} = \frac{2 \ln(ut) e^{-t}}{1 - e^{-2t}} \\
 &= 2 \ln(ut) e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2 \ln(ut) e^{-(2n+1)t}}_{= f_n(t)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Posons } F_n(t) &= \sum_{n=0}^N 2 \ln(ut) e^{-(2n+1)t} \\
 &= 2 \ln(ut) e^{-t} \frac{1 - e^{-(2N+2)t}}{1 - e^{-2t}} \\
 &\leq 2 \ln(ut) \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}} \\
 &\leq \frac{2 \ln t e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = \frac{\ln t}{\sinh t}.
 \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \frac{\ln t}{\sinh t} \text{ se prolonge par continuité à } t=0$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^N 2 \ln t e^{-t} \text{ intégrable au voisinage de } t=0$$

$\Rightarrow$ Théorème de convergence dominée donne

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ut)}{\sinh(t)} dt &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F_N(t) dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n(t) \right) dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt
 \end{aligned}$$

Calcul des $\int$ effectués //

Exercice 6

p, q 2 reals > 0

$$? \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}$$

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^q)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{nq+p-1}$$

$$f_n \text{ sur } \int_0^1 \text{ sur } [q, 1]$$

$\sum f_n(x)$ avec vers $f(x)$ qui est $\mathcal{C}^\infty(p, m)$ sur $[0, 1]$

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 x^{nq+p-1} dx = \left[\frac{x^{nq+p}}{nq+p} \right]_0^1 = \frac{1}{nq+p}$$

et $\sum \frac{1}{nq+p}$ diverge $\Rightarrow$ on ne peut pas appliquer le
The d' $\int_0^1$ donc à l'ère

appliquons le the de convergence dominée :

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n x^{nq} x^{p-1}$$

$$= x^{p-1} \times \frac{1 - (-x^q)^{N+1}}{1 + x^q} \leq x^{p-1} \times \frac{1 + (x^q)^{N+1}}{1 + x^q}$$

$$\text{On } x \in [0, 1] \Rightarrow 0 < (x^q)^{N+1} < 1$$

$$\leq \frac{2x^{p-1}}{1+x^q}$$

$$\text{et } \varphi(x) = \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} \in L^1([0, 1])$$

$\Rightarrow$ le the de convergence dominée s'applique

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{kq+p}$$

Exercice 2

$$\Gamma^n : n \mapsto \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$1) f : (n, t) \mapsto t^{n-1} e^{-t}$$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^{n-1} e^{-t}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\rightarrow$ Intégrabilité :

$\hookrightarrow$ en $+\infty$ $t^{n-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow$ intégrable

$\hookrightarrow$ en 0 : $t^{n-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} f(n, t)$ intégrable si $n-1 > -1$
 i.e. $n > 0$

$\Rightarrow \Gamma$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On applique le théo de domage $\mathcal{C}^p$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. et $f(n, t) = t^{n-1} e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

- Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ $n \mapsto f(n, t)$ est dérivée $\mathcal{C}^k$

$$\text{et } \frac{\partial^k f(n, t)}{\partial n^k} = \ln^k t \times t^{n-1} e^{-t} = \ln^k t f(n, t)$$

- Soit $n \in \mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto \frac{\partial^k f(n, t)}{\partial n^k}$ est $\mathcal{C}^p$ car $\mathcal{C}^0$.

- Soit $p \in [0, k-1]$ et $n \in \mathbb{R}_+^*$ fixe

$$t \mapsto \frac{\partial^p f(n, t)}{\partial n^p} = \ln^p t \times t^{n-1} e^{-t}$$

$\rightarrow$ en $+\infty$ $\frac{\partial^p f(n, t)}{\partial n^p} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2 (\ln t)^p t^{n-1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 par croissance comparée

$\rightarrow$ en 0 $\frac{\partial^p f(n, t)}{\partial n^p} = \ln^p t \times t^{n-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} \ln^p t \cdot t^{n-1}$

Soit $\alpha < 1$ tel que $\alpha + n - 1 > 0$ - de sorte $\frac{1}{t^\alpha}$ intégrable
 et $t^\alpha \times t^{n-1} \times \ln^p t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

par C.C.

il suffit de prendre $1 - \alpha < \alpha < 1$.

possible car $1 - n < \alpha$

$\rightarrow$ Soit $1 - n < \alpha < 1$

alors $\ln^p t \times t^{n-1} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \Rightarrow$ intégrable

Ainsi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in [a, b-1]$
 $t \mapsto \frac{2^p f(t, t)}{2^{\alpha p}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

- Dominante : de $G_n(t) \mapsto \frac{2^k f(t, t)}{2^{\alpha k}} = \ln^k t \cdot t^{n-1} e^{-t}$

pour $\alpha \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$
 $t \in [1, \ln] \ln^k t \cdot t^{a-1} e^{-t} \leq \ln^k t \cdot t^{n-1} e^{-t} \leq \ln^k t \cdot t^{b-1} e^{-t}$
 $t \in]\ln, 1] \ln^k t^{b-1} e^{-t} \leq \ln^k t^{n-1} e^{-t} \leq \ln^k t \cdot t^{a-1} e^{-t}$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in [a, b]$

$$\left| \frac{2^k f(t, t)}{2^{\alpha k}} \right| \leq \underbrace{\ln^k t \cdot t^{n-1} e^{-t}}_{= \varphi(t) \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ comme } u}$$

plus haut

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \gamma_k P(k)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\Gamma^k(n) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{n-1} e^{-t} dt.$$

3.) $\Gamma(n) \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} dt$

Pour cela on va appliquer le Théorème d'intégration terme à terme.

$$\frac{t^{n-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} \quad \text{et } \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n$$

$$\Rightarrow \forall t > 0 \quad \forall n > 0 \quad \frac{t^{n-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n-1} e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt}$$

soit $\forall n \geq 1, \forall n > 0 \quad u_n(t) = t^{n-1} e^{-nt}$
 c'est une f.e.

$\sum u_n(t)$ converge vers $\frac{t^{n-1}}{e^t - 1}$ qui est $\mathcal{C}^0$.

Il faut noter que $\forall n \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt$ age

On effectue le ch^g de variable $u = nt$ $du = n dt$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^{n-1} e^{-u} \frac{du}{n} \\&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^n} \cdot u^{n-1} e^{-u} du \\&= \frac{1}{n^n} \Gamma(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \Gamma(n) \\&= \Gamma(n) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.\end{aligned}$$

d'où la convergence de la série.

$\Rightarrow$ (the di $\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt$):

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-nt} dt \\&= \Gamma(n) \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \\&= \Gamma(n) \times \zeta(n)\end{aligned}$$

Exercice 8

(69)

$$g(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$$

1) ∂g ?

$$\operatorname{sh}(n) \underset{0}{=} n + \frac{n^3}{3!} + o(n^3)$$

$$f(n, t) = \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sh}(n)}{n} \underset{0}{=} 1 + \frac{n^2}{3!} + o(n^2) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 1$$

à prae : $t \mapsto f(n, t)$ ne prolonge pas continûment en 0
 $\Rightarrow \int_{\text{all}} \text{sur } [0, 1]$

$$\bullet \operatorname{sh}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^t$$

$$\Rightarrow (\text{à prae}) \quad \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{(1-n)t}}{2t}$$

$\Rightarrow$ converge sur $[1, +\infty[$ si $1-n < 0$
 si $n > 1$

$$\Rightarrow \partial g =]1, +\infty[$$

2) On applique le Thm de dérivation φ' .

pour tout $n > 1$, $t \mapsto f(n, t)$ sv epm car φ^0 et intégrable (cf 1)
 pour tout $t > 0$, $n \mapsto f(n, t)$ sv de classe φ' .

$$\frac{\partial f}{\partial n}(n, t) = -e^{-nt} \operatorname{sh}(t).$$

pour tout $n > 1$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial n}(n, t)$ sv epm car φ^0 .

Dérivation : $\forall (n, t) \in]1, +\infty[\times]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial n}(n, t) \right| \leq \frac{1}{2} e^{(1-n)t}$$

pour $n \in [a, b] \subset]1, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial n}(n, t) \right| \leq \frac{1}{2} e^{(1-a)t} = \varphi(t) \int_{\text{all}} \text{sur } [0, 1]$$

car $1-a < 0$

Donc d'après le Thé de domé $\mathcal{E}^1$, g est $\mathcal{E}^1$

$$\text{et } g'(n) = \int_0^{+\infty} -e^{-nt} \operatorname{sh}(t) dt$$

Calculons $g'(n)$ $n > 1$

$$g'(n) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{-t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^t dt \quad \text{après}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(1-n)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-(n+1)t}}{(n+1)} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(1-n)t}}{1-n} \right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{g'(n) = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(1-n)}}$$

$$3) \quad n \geq 2 \quad g(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$$

Appliquons le Thé de convergence dominée.

$$f_n(t) = \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t} \quad \text{car sur } \mathbb{R}_+^* \text{ on a } e^0$$

$$f_n(t) \xrightarrow{sr} 0 \quad \text{car } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$n \geq 2 \quad \left| \frac{e^{-nt} \operatorname{sh}(t)}{t} \right| \leq \frac{e^{-2t} \operatorname{sh}(t)}{t} = \varphi(t)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction décroissante en 0)
et $\sim \frac{e^{-t}}{2t}$ en $+\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

$$4) \quad g'(u) = \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(1-u)}$$

$$\Rightarrow g(u) = \frac{1}{2} \ln(u+1) - \frac{1}{2} \ln(1-u) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u+1}{1-u}\right) + c$$

$$\text{or } g(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} c \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{g(u) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u+1}{1-u}\right)}$$

Exercice

(70)

$$g(u) = \int_0^{+ \infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} dt$$

$$1) \text{ famille impaire en } 0 \quad \begin{aligned} e^{-t} - e^{-ut} &\underset{0}{\sim} ut - t + o(t) \\ &\underset{0}{\sim} (u-1)t + o(t) \\ \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} (u-1) \end{aligned}$$

• en $+\infty$ diverge pour $u \leq 0$
converge pour $u > 0$

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$$

2) On applique le théorème de dérivation.

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad u \mapsto f(u, t) = \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} \text{ sr } \mathcal{C}^1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, t) = +e^{-ut}$$

$$\bullet \forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad t \mapsto f(u, t) \text{ sr } \mathcal{C}_p \text{ en } \mathcal{C}^0$$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u, t) = +e^{-ut} \text{ sr } \mathcal{C}_p \text{ en } \mathcal{C}^0$$

$$\bullet x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^* \quad t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$$

et c'est vrai pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_r^*$
 $\Rightarrow$ D'après le Th de de l'inv φ^{-1} g st dérivable

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_0^{+\infty} -e^{-ur} dr \\ &= \left[-\frac{e^{-ur}}{u} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{u} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(u) = -\ln u + c \quad \text{où } g(1) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{g(u) = -\ln(u)}$$

Exercice 10

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$$

1) $\mathcal{D}_g = ?$

$x \geq 0$; $x=0$ $\xrightarrow{\text{en } 0=t}$ $f(t, t) = \frac{\ln(t^2)}{(1+t^2)} = \frac{2 \ln(t)}{1+t^2}$

intégrable en 0 car $\ln \in L^1([0, 1])$

$x > 0$ $\mathcal{C}^\infty$ en 0. $\Rightarrow \in L^1([0, 1])$

en $+\infty$:

$x \geq 0$ par x $\frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} \leq \frac{\ln(x+t^2)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$

$\Rightarrow \in L^1([1, +\infty[))$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$$

2) g est $\mathcal{C}^\infty$!

Appliquons le théorème de continuité sous $\int$

- $x \in \mathbb{R}_+$ par x $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^p$ car $\mathcal{C}^\infty$
- $t \in \mathbb{R}_+$ par $x \mapsto f(x, t)$ est continue.

$$\text{sur } [a, b] \subset \mathbb{R}_+$$

$$\forall n \in [a, b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\ln(n+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{|\ln(b+t^2)|}{1+t^2} \quad n'x+t^2$$

$$\dots = \left| \frac{\ln(n+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{|\ln(a+t^2)|}{1+t^2} \quad n'x+t^2$$

$$\forall n \in [a, b], \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

$$\left| \frac{\ln(n+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \left| \frac{\ln(a+t^2)}{1+t^2} \right| + \left| \frac{\ln(b+t^2)}{1+t^2} \right|$$

$$= \varphi(t).$$

all par le m argument que precedent.

$\Rightarrow$ g est continue sur $\mathbb{R}_+$

3) Appliquons le The de derivée $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n \mapsto f(n, t)$ str de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\frac{\partial f}{\partial n}(n, t) = \frac{1}{(1+t^2)(n+t^2)}$$

- pour tout $n \in \mathbb{R}_+$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial n}(n, t) \text{ str } \mathcal{C}^p \text{ car } \mathcal{C}^0.$$

- soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial n}(n, t) \right| = \frac{1}{(1+t^2)(n+t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)n + (1+t^2)t^2} \leq \frac{1}{a(1+t^2)}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{a(1+t^2)} \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ car } \mathcal{C}^0 \text{ en } 0$$

$$\text{et } O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ en } +\infty.$$

$\Rightarrow$ g derivable et $\forall n \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(n) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(n+t^2)} dt.$$

$$\rightarrow \text{Calcul de } g'(n) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+t^2)(1+t^2)} dt.$$

$$n \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{n+t^2} + \frac{b}{1+t^2} &= \frac{a(1+t^2) + b(n+t^2)}{(n+t^2)(1+t^2)} \\ &= \frac{a+bn + (a+b)t^2}{(n+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{(n+t^2)(1+t^2)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+bn=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a(1-n)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{n-1} \\ a = \frac{1}{1-n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)(n+t^2)} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{n+t^2} \right]$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{n+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2} dt$$

$$u = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{n}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow g'(n) = \frac{1}{n-1} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right] \quad \forall n \neq 1$$

$$= \frac{\pi(\sqrt{n}-1)}{2\sqrt{n}(n-1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{par continuité de } g' \quad g'(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{4.2)} \quad g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2)}{1+t^2} dt$$

$$t = \frac{1}{u} \quad \frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2} \quad dt = -\frac{du}{u^2}$$

$$\frac{\ln(t^2)}{1+t^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{-2\ln(u)}{u^2+1} \times u^2$$

$$\Rightarrow g(t) = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(u^2)}{u^2+1} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u^2)}{u^2+1} du = -g(t)$$

$$\Rightarrow g(t) = 0.$$

$$\underline{4.6)} \quad g'(u) = \frac{\pi}{2\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)} \quad g(0) = 0.$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\pi}{2\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)} dt = \ln(\sqrt{u}+1) \times \pi + C$$

$$\Rightarrow g(u) = \pi \ln(\sqrt{u}+1) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^*$$

ma è zero in 0 per continuità di g su $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 11

(71)

$$f(n, t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t+1}}$$

$$n \in \mathbb{R}_+^*$$

→ n fixe $t \mapsto f(n, t)$ sr $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{C}^0$.

→ t fixe $n \mapsto f(n, t)$ sr $\mathcal{C}^\infty$.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{\partial^k f(n, t)}{\partial n^k} = (-t)^k \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t+1}}$$

à n fixe, $t \mapsto \frac{\partial^k f(n, t)}{\partial n^k}$ sr $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{C}^0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left| \frac{\partial^k f(n, t)}{\partial n^k} \right| = \frac{t^k e^{-nt}}{\sqrt{t+1}} \leq \frac{t^k e^{-at}}{\sqrt{t+1}}$$

$$\psi(t) = \frac{t^k e^{-at}}{\sqrt{t+1}} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

car $\mathcal{C}^0$ en 0

et $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

$$\Rightarrow g(n) = \int_0^{+\infty} f(n, t) dt \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{et } g^k(n) = \int_0^{+\infty} (-t)^k \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t+1}} dt.$$



Ex 12

$$f(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ur}}{1+t^2} dr$$

$$g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{u+t} dr$$

1) The de $\mathcal{C}^0$ appliqué à f

• $\forall t \in \mathbb{R}_+, u \mapsto \frac{e^{-ur}}{1+t^2}$ sr continue sur $\mathbb{R}_+$

• $\forall u \in \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{e^{-ut}}{1+t^2}$ sr épu car $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$

• $\forall (u, t) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\left| \frac{e^{-ur}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

$\Rightarrow f$ sr continue sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow$ Appliquons le The de derivée $\mathcal{C}^p$, $p=2$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+ u \mapsto \frac{e^{-ur}}{1+t^2}$ sr $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e^{-ur}}{1+t^2} \right) = -\frac{t e^{-ur}}{1+t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{e^{-ur}}{1+t^2} \right) = \frac{t^2 e^{-ur}}{1+t^2}$$

$\forall u \in \mathbb{R}_+$

$t \mapsto \frac{\partial}{\partial u} f(u, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u, t)$ sr épu car $\mathcal{C}^0$.

soit $u \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\partial}{\partial u} f(u, t) = \left| \frac{t e^{-ur}}{1+t^2} \right| \leq \frac{t e^{-ar}}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u, t) = \frac{t^2 e^{-ur}}{1+t^2} \leq \frac{t^2 e^{-ar}}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

$\Rightarrow f$ sr de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ pour tout $[a, b]$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(u) = \int_0^{+\infty} \frac{-t e^{-ur}}{1+t^2} dr$$

$$f''(u) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-ur}}{1+t^2} dr$$

$$\begin{aligned}
 x) \quad g'(u) &= \int_0^{+\infty} \frac{1 + t e^{-ut}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) e^{-ut}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ut}}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-ut} dt - g(u) \\
 &= \left[-\frac{1}{u} e^{-ut} \right]_0^{+\infty} - g(u) \\
 &= \frac{1}{u} - g(u) \quad \boxed{g'(u) + g(u) = \frac{1}{u}}
 \end{aligned}$$

EDL 2

$$2) \quad g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{m(t)}{u+t} dt$$

$u > 0 \quad t \mapsto \frac{m(t)}{u+t}$ est p.p.m

Intégrabilité $\frac{m(t)}{u+t}$: à l'aide d'une IPP.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} \frac{m(t)}{u+t} dt \quad u = \frac{1}{u+t} \quad u' = -\frac{1}{(u+t)^2} \\
 &= \left[-\frac{\omega(t)}{u+t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\omega(t)}{(u+t)^2} dt \quad v = -\omega(t) \quad v' = m(t) \\
 &\quad \text{age} \quad \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\omega(t)}{(u+t)^2} dt}_{\text{age}} \quad \text{On } \left| \frac{\omega(t)}{(u+t)^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \text{age} \rightarrow +\infty \quad + \text{age} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ d'où l'intégrabilité $\Rightarrow g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$

$x) \quad t = u - u \quad u' = -1$

$$g(u) = \int_u^{+\infty} \frac{\sin(u-u)}{u} du = \int_u^{+\infty} \frac{\sin u \cos u - \cos u \sin u}{u} du$$

$$g(n) = \underbrace{\cos(n) \int_n^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du}_{(*)} - \underbrace{\sin(n) \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du}_{(**)}$$

On applique: $\mathbb{R}^n$ $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ alors $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$
 $\Rightarrow$ L et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$
 (*) et (**) sont donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $-\frac{\sin(n)}{n}$ et $-\frac{\cos(n)}{n}$
 $\Rightarrow g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\Rightarrow g'(n) = -\sin(n) \int_n^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\cos(n) \sin(n)}{n} - \cos(n) \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\sin(n) \cos(n)}{n}$$

$$\Rightarrow g'(n) = -\sin(n) \int_n^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \cos(n) \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

Pour les n suivants g' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g''(n) = -\cos(n) \int_n^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{\sin^2(n)}{n} + \sin(n) \int_n^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos^2(n)}{n}$$

$$\Rightarrow g''(n) = -g(n) + \frac{1}{n}$$

g vérifie la m EOL que f sur $\mathbb{R}_+^*$

$$3) n \in \mathbb{R}_+ \quad g(n) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(1+t)^2} dt \quad \text{s'obtient par l'IPP}$$

$$u = \frac{1}{1+t} \quad u' = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$v = 1 - \cos(t) \quad v' = \sin(t)$$

Intégration: on applique le Thé de convergence sous $\int$.

$$* \forall t > 0 : n \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{(1+n)^2} \text{ est } \mathcal{C}^0$$

$$* \forall n > 0 : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{(1+n)^2} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ car } \mathcal{C}^0$$

$$= \forall (n, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{1 - \cos(t)}{(t+n)^2} \right| = \frac{1 - \cos(t)}{(t+n)^2} \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$$

$$\varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ car: } \begin{array}{l} - \text{fonction continue en } 0 \\ - O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ en } +\infty. \end{array}$$

$\Rightarrow g$ continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$4) \quad n > 0 \quad 0 \leq f(n) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$$

$$0 \leq g(n) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(t+n)^2} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{t+n} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$$

On pose $h = f - g$ h vérifie EDL_2 homogène

$$h'' + h = 0$$

$$\Rightarrow h(n) = a \cos(n) + b \sin(n)$$

$$\text{mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$$

On en déduit (en considérant les suites $(2n\pi)_n$ et $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)_n$)
que $a = b = 0$. $\Rightarrow h = 0 \Rightarrow f = g$.

$$5) \quad f = g \quad \text{et} \quad f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$= g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et pour eux aussi le jeu de grâce du transport; 1 et 2

$$? \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(\cos(n^2)) dx ?$$

$$f_n(u) = \ln(\omega(u^n)) \quad \text{gpm} \quad (v^0)$$

$$\begin{array}{lcl}
 n' & 0 \leq n \leq 1 & \text{ahn} \quad x^n \rightarrow 0 \\
 n' & n=0 & \text{h} \quad x^n \rightarrow 0 \\
 n' & n=1 & \text{h} \quad x^n \rightarrow 1
 \end{array}
 \Rightarrow h(\psi(n)) \rightarrow \begin{cases} h(0) = 0 & n=0 \\ h(1) & n=1 \end{cases}$$

et $\forall n \in [2, \infty] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq n^n \leq n \leq 1$$
$$\cos(1) \leq \cos(n) \leq \cos(n^n) \leq \cos(0) = 1$$
$$\ln(\cos(1)) \leq \ln(\cos(n)) \leq \ln(\cos(n^n)) \leq \ln(1) = 0$$
$$\Rightarrow |\ln(\cos(n^n))| \leq |\ln(\cos(1))|$$

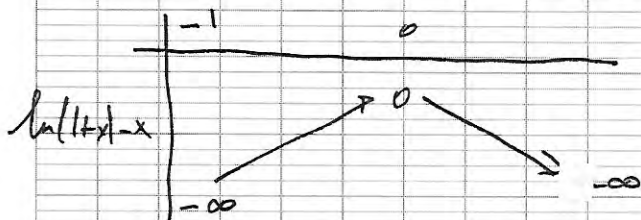
$\forall q \quad n \mapsto \ln \cos(1/n)$ str constante et donc intégrable sur $[0, 1]$
 $\Rightarrow$ thm de convergence dominée

les intervalles bornés et : (par continuité de la

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(\omega(u^n)) du &= \int_0^1 \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(u^n)) du \\ &= \int_0^1 \ln(1) du = 0. \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \frac{u}{n})}{n} e^{-u} du$$

$$1) \quad n > -1 \quad (\ln(1+n) - n)' = \frac{1}{1+n} - 1 = \frac{-n}{1+n} \quad \begin{cases} > 0 \text{ wenn } n < 0 \\ < 0 \text{ wenn } n > 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \forall n) -1 \leq \ln(1+n) \leq n$$

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n: u \mapsto \frac{\ln(1+\frac{u}{n})}{n} e^{-u} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$$

$$f_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{qui est } \mathbb{R}^+$$

$$n \geq 0 \quad \ln(1+\frac{u}{n}) \leq \frac{u}{n} \Rightarrow |f_n(u)| \leq \frac{1}{n} e^{-u} \leq e^{-u}$$

$u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \text{Théorème de convergence dominée assure que } I_n \text{ est bien définie}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) du = \int_0^{+\infty} 0 du = 0.$

$$3) \quad n f_n(u) = \frac{n}{n} \ln(1+\frac{u}{n}) e^{-u} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-u}$$

$$\text{De plus } |n f_n(u)| \leq e^{-u}$$

$$\Rightarrow \text{TCD} \Rightarrow n I_n \text{ est bien définie et que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{On en déduit que } I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$