

Préparation aux Oraux

TABLE DES MATIÈRES

I - Analyse	2
I.1. Fonctions	2
I.2. Equations différentielles	5
I.3. Calcul différentiel	6
I.4. Suites et séries numériques	10
I.5. Suites et séries de fonctions	25
I.6. Séries entières	37
I.7. Intégration	48
I.8. Intégrales à paramètre	57
II - Algèbre	66
II.9. Logique, ensembles, applications, dénombrement, arithmétique	66
II.10. Nombres complexes et trigonométrie	66
II.11. Espaces vectoriels normés	68
II.12. Polynômes	69
II.13. Algèbre linéaire	72
II.14. Algèbre bilinéaire	109
III. Probabilités	121
IV - Centrale Python	132

Note : Les planches d'oraux retranscrites ici sont parfois incomplètes, incorrectes, adaptées etc. La plupart des planches présentes dans ce document émanent de :

- l'Officiel de la Taupe (<http://www.odlt.fr>)
- la Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles (<http://beos.prepa.org>)
- planches récoltées, entre autres, par MM. Jacquet et Patey, précédents professeurs de la classe de PC.
- planches rapportées par vos prédécesseurs.

I. Analyse

I.1. Fonctions.

0. (CCINP 2023) (Charles)

Soit f une fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

a) Justifier que f est \mathcal{C}^∞ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donner f' et f'' .

b) (i) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$(*) \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+1}}$$

On justifiera que pour tout n $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$. On admettra que P_n vérifiant (*) est unique.

b) (ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et unitaire.

On pose $P_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k$.

c) (i) Montrer que pour tout n, k , $a_{n,k} \geq 0$ puis que $f^{(n)}(x) \geq 0$.

c) (ii) Justifier la formule $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

(+ deux autres questions...)

0 bis. (CCINP 2023) (Younoussa)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x-2)e^x + x + 2$

a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ et résoudre $f(x) = x$ sur \mathbb{R}_+ .

b) Montrer que $g \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ .

c) Montrer que f est C^1 et donner $f'(0)$.

d) Montrer que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}_+ . (indication : relier f'' et g).

e) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) est bien définie et étudier cette suite.

1. (X-ESPCI 2023) (Martin)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la dérivée à droite $f'_d(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante.

(Indication. On pourra commencer par le montrer pour f tel que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'_d(x) \geq \varepsilon > 0$.)

1 bis. (Mines-Ponts 2022) (Jean)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, b], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = a > 0$ et $\forall x \in [0, b], f'(x) \geq f^3(x)$.

Montrer que $b \leq \frac{1}{2a^2}$.

2. (CCINP 2019)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x), f(1) = 1 \text{ et } : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) > 0.$$

(a) Énoncer le théorème de Rolle.

(b) i. Expliciter $f(n)$ pour n dans \mathbb{N}^* .

ii. Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$. En déduire les variations de f sur \mathbb{R}_+^* .

(c) i. Montrer que f est de signe constant sur \mathbb{R}_+^* ; déterminer son signe.

ii. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(d) Préciser la nature des intégrales suivantes :

i. $\int_1^{+\infty} f$

ii. $\int_0^1 f$

iii. $\int_1^{+\infty} 1/f$

2 bis. (MinesTel 2024) (Raphaël V.)

Donner le développement limité à l'ordre maximal en 0 de $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. (CCINP 2019, CCP 2018)

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}. \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leq |x|$. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on note g son prolongement.

(c) Pour $x > 0$, on pose $Tf(x) = \frac{f(x)}{x}$. Est-ce que Tf admet une limite en 0 (utiliser $x_n = 2/(2n+1)$ et $y_n = 1/(n+1)$) ? g est-elle dérivable en 0 ?

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq 2$. La fonction f est-elle continue en $1/k$? Préciser l'ensemble des points où f est continue (prendre $I = \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[$ et $J = \left] \frac{1}{k}, \frac{1}{k-1} \right[$).

(e) Existence et calcul de $\int_{1/2}^1 f(x) dx$.

4. (Mines Télécom 2019)

$$\text{Soient } a, b \in \mathbb{R}_+^*. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

5. (Mines Télécom 2019)

On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

6. (CCINP 2019)

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$

- (a) Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .
- (c) Montrer que f ainsi prolongée est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

7. (Mines Télécom 2019)

Montrer que $\text{Arccos}(1-x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

On pose $y = \text{Arccos}(1-x)$. Vérifier que y tend vers zéro et penser à utiliser le caractère bijectif d'arccos.

8. (Mines Télécom 2017)

Soit C l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

Pour tout $x > 0$, on définit $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{x^3} f(t) dt$ (avec $f \in C$).

- (a) Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+^* et prolongeable par continuité en 0 .
- (b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 et donner sa dérivée.

9. (CCP 2016)

(a) Montrer que $f(x) = e^{-1/x}$ est \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X], f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

(c) On pose $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$.

(d) Montrer que g est \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

(e) Peut-elle être solution d'une équation différentielle homogène d'ordre n ?

10. (CCP2016)

Domaine de définition de $f(x) = \text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Montrer que f est \mathcal{C}^∞ et calculer f' .

11. (Mines Télécom 2016)

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.

12. (ENSEA 2016)

Résoudre $3^x + 4^x = 5^x$.

13. (Mines Télécom 2015)

Un marcheur parcourt (continûment) 6 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant lequel il parcourt exactement 3 kilomètres.

14. (CCP2015)

On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = \frac{1-t^3}{t}$

(a) Calculer f' . En déduire que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers $[0, +\infty[$

(b) On pose u la bijection réciproque de f .

Montrer que $\forall x \geq 0, (u(x))^3 + x.u(x) - 1 = 0$

(c) Montrer que u est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0, u'(x) = \frac{-u(x)}{3u(x)^2 + x}$

- (d) Montrer que $u(1) \geq \frac{1}{2}$ à l'aide de 13 b puis $|u'| \leq \frac{1}{3u}$
- (e) Montrer que $u(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $1/x$.
- (f) Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)} dx$.
- (g) On pose $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = u(a_n)$; on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$; donner la nature de $\sum_{n \geq 0} (a_n - L)$.

15. (CCP2015)

- (a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
- (b) Montrer que $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctan}(x \tan \theta) d\theta$ est définie sur \mathbb{R} et impaire.
- (c) Montrer que f est continue, étudier ses variations et montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- (d) Montrer que $\forall x > 0, f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

I.2. Equations différentielles.

16. (CCINP 2021) (Juliette)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme.
- (b) Résoudre $y' - xy = 0$. En déduire $\text{Ker } \varphi \cdot \varphi$ est-il injectif?
- (c) Montrer que φ est surjectif.
- (d) Dans cette question, on considère $g : x \mapsto (1 + x^2) e^{x^2}$.

i. Résoudre complètement $y' - xy = g$ à l'aide de $x \mapsto \int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt$

(Questions manquantes.)

(e) Montrer que φ induit un endomorphisme dans l'ensemble \mathcal{P} des applications polynomiales. ϕ est-il injectif? surjectif?

17. (Mines Télécom 2019)

Trouver l'ensemble des fonctions f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$$

18. (CCINP 2019)

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- (a) Montrer que ϕ , qui, à $f \in E$, associe g donnée par $g(x) = f'(x) - xf(x)$, est un endomorphisme.
- (b) Résoudre $y' - xy = 0$ et en déduire $\text{Ker } \phi$. ϕ est-elle injective? Surjective?
- (c) Soit $g(x) = (1 + x^2) e^{x^2}$. Ecrire les solutions de $y' - xy = g$ à l'aide de $\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt$.
- (d) Déterminer $h(x)$ telle que $f(x) = h(x)e^{x^2}$ soit solution de $y' - xy = g$ avec $f(0) = 0$ puis en déduire la valeur de $\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt$.

(e) Montrer que la restriction ψ de ϕ au sous-espace P des fonctions polynomiales est un endomorphisme. Est-il injectif? Surjectif?

19. (CCP2018)

Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $] -r, r[$.

Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}$.

Pour tout $x \in]0, r[$, on pose $T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u) du$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{\alpha}{x}y = 0$.

(b) Pour tout $x \in]0, r[$, montrer l'existence de $M_x \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, x], |f(t)| \leq M_x$. En déduire que pour tout $x \in]0, r[$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)$ est intégrable sur $]0, x[$.

(c) Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0, r[$ puis résoudre (E) sur cet intervalle.

(d) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]0, r[$, $T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n + \alpha} x^n$.

(e) Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0, r[$ qui possède une limite finie en 0.

20. (EIVP 2017)

(a) Résoudre $xy' - (1 + \lambda)y = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Éléments propres de $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, défini par $\Phi(P)(X) = XP'(X) - P(X)$.

21. (Mines Télécom 2017)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

(b) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A . Déterminer une base (v_1, v_2) de \mathbb{R}^2 telle que $\mathcal{M}_{(v_1, v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

22. (TPE-EIVP 2016)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1$. (Considérer $g(x) = f(x)f(-x)$)

23. (CCP2015)

Soit a appartenant à \mathbb{R} .

$S_a = \{f \text{ de classe } C^2 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(a - x) \text{ et } f(0) = 0\}$

(a) Montrer que si f appartient à S_a alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

(b) Déterminer S_a .

24. (TPE EIVP 2015)

Soit l'équation différentielle : $y'' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Résoudre l'équation différentielle en utilisant des séries entières.

I.3. Calcul différentiel.

25. (CCINP 2021) (Claudia)

Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

(a) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto g\left(\frac{y}{x}\right)$ appartient à \mathcal{E} .

(b) i. Soit $v > 0$. On définit : $\forall t > 0, \Phi(t) = f(t, vt)$. Montrer que Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $\forall t > 0, \Phi(t) = \Phi(1)$ (on peut calculer $\Phi'(t)$).

ii. Prouver que $f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

On considère l'équation (E) : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$

(c) i. Soit $\Gamma(t) = f(xt, yt)$. Montrer que $\Gamma'(t) = \frac{t(x^2 + y^2)}{1 + t^2(x^2 + y^2)}$

ii. (Question manquant. J'imagine :) En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).

(d) Montrer que $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ est définie et bornée.

26. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ est \mathcal{C}^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

(b) Déterminer les points critiques de f et donner leur valeur.

(c) On pose $P(t) = \left(t\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(t\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2$. Montrer que $\deg(P) = 2$ et calculer Δ . En déduire que f admet un minimum global.

(d) On pose $g(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que $g(x_1, \dots, x_n) \geq n^2$ et trouver au moins un n -uplet vérifiant l'égalité.

(e) Montrer que $g(x_1, \dots, x_n) = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right)$ et en déduire une nouvelle méthode pour montrer le résultat précédent.

27. (CCINP 2019)

Soient $D =]-1, 1[\times \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in D \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2} \cos(y)$.

(a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(b) i. Préciser les points critiques de f .

ii. Montrer que : $\forall (x, y) \in D, f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$. iii. En posant $u = \sqrt{1 - x^2}$, montrer que f atteint son maximum global en $(\sqrt{3}/2, \pi)$.

(c) i. Étudier le signe de $f(0, y) - 1$.

ii. Faire un développement limité à l'ordre 2 de $f(x, \pi) - 1$.

iii. Le point $(0, \pi)$ est-il un extremum local ?

(d) Montrer que le point $(0, 0)$ est un minimum global.

28. (CCINP 2019)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \text{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et

$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

(a) Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\operatorname{sh}(t) \geq t$.

(b) Montrer que f admet un minimum nul sur \mathbb{R}^2 .

(c) Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D .

(d) Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D' .

(e) En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

(f) Étudier les variations sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Conclure.

29. (CCP2018)

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$

(a) Trouver a, b dans \mathbb{R} tel que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.

(b) Résoudre $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$ sur les intervalles appropriés.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose $F = f \circ g$. Donner l'expression de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(d) On suppose que f'' ne s'annule jamais et que g est harmonique. Montrer que F est harmonique si et seulement si g est constante.

(e) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose $G : (x, y) \mapsto h\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{ch}(y)}\right)$. Déterminer h pour que G soit harmonique.

30. (CCP2018)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $E = C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F = C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Soit $\phi : f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - af$

(a) Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F .

(b) Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \sin(y) \exp(ax)$. Calculer $\phi(f)$.

(c) Soit $G = \{\alpha(y) \exp(ax) \text{ avec } \alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset \operatorname{Ker}(\phi)$. ϕ est elle injective ?

(d) Soit $A \in F$. Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \exp(ax) \int_0^x A(t, y) \exp(-at) dt$. Montrer que f admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 et les calculer. Montrer que $\phi(f) = A$.

(e) Montrer que $G = \operatorname{Ker}(\phi)$.

(f) Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$$

31. (CCP 2018) (a) Soit $g : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp(x)$.

Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \exp(y) + y \exp(x)$.

Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ et $x_0 y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$.

Déterminer le(s) point(s) critique(s).

(c) Soit $x \rightarrow f(-1 + ax, -1 + x)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.

(d) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

(e) Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.

Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

32. (CCP 2017)

(a) Montrer que $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

(b) Soit $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$. Exprimer $F(x) = \int_0^x f(x, t) dt$ en fonction de g , montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $F'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

(c) Dans cette question, f désigne une fonction \mathcal{C}^1 à valeurs réelles. Montrer que $\phi(x, y) = \int_0^y f(x, t) dt$ admet des dérivées partielles et les expliciter.

33. (Mines Télécom 2017)

(a) Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2) y' + 2ty = 0$.

(b) Soit f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ avec g de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

i. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .

ii. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

34. (CCP 2016)

Trouver l'(es) extremum(s) de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

35. (CCP 2015)

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E , A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique. On étudie la fonction f de E dans \mathbb{R} qui à tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2\langle x, u \rangle$.

(a) Ici $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = (5, 1)$.

Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$.

Montrer que $X_0 = (2, 1)$ est un point critique de f .

(b) Avec les conditions de la question 1 : soit $h = (h_1, h_2)$.

Montrer que $f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0 .

(c) On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E , $\langle x, \varphi(x) \rangle > 0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ , montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

36. (CCP 2015)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(x, y) \mapsto e^x + e^y + e^{-x-y}$

(a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t$

(b) Déterminer tous les points critiques de f et donner leur nature. Existe-t-il un maximum ?

37. (CCP 2015)

Donner le laplacien de $F(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ où ϕ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

38. (Mines Télécom 2015)

(a) Soit f de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} ; on pose $g(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

(b) Montrer que g est définie sur \mathbb{R}^{*3} et qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 .

(c) On note $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

Montrer que $\Delta g = \frac{2}{r} f'(r) + f''(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(d) Trouver f tel que $\Delta g = 0$.

I.4. Suites et séries numériques.

38 bis. (CCINP 2023) (Eva)

Soit (u_n) définie par $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

a) Montrer que (u_n) est décroissante.

b) Montrer que (u_n) admet une limite que l'on calculera.

38 ter. (CCINP 2023 sans préparation) (Paola)

Soit $a \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$.

a) Etudier la convergence de la série de T.G. u_n .

b) Calculer la somme des u_n . (Indication : $\cos(\theta/2) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta/2)}$.)

38 quater. (Mines-Ponts 2023) (Paola)

Soit $u_n > 0$ tel que $\sum u_n$ diverge. Montrer que $\sum u_n^{2/3}$ diverge.

39. (CCINP 2021) (Oden ?)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

(a) Justifier l'existence de $\lim u_n$ et la calculer.

(b) Etudier la convergence de $\sum u_n$.

39 bis. (CCINP 2024 - avec preparation) (Ségolette)

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $u_n = \frac{\ln n}{n}$; $v_n = (-1)^n u_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R}_+^* .

2. comparer u_n et $\frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 3$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n , v_n .

3. Ecrire $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une seule somme. A l'aide de comparaison serie-integrale montrer :

$$\frac{\ln(2n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} \leq S_{2n} - S_n \leq \frac{\ln(2n)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

40. (CCINP 2021) (Célian)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

On note $u_n(x) = f(n+x) - f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et, en cas d'existence, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- (a) i. Vérifier $\sum_{n=1}^N u_n(1) = f(N+1) - f(1)$.
- ii. En déduire que $F(1)$ existe si et seulement si $(f(n))$ converge.
- (b) i. On considère $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$. Montrer que $F(1)$ existe et calculer sa valeur.
- ii. On considère $f : x \mapsto \sin\left(\pi x + \frac{\sqrt{x}}{2}\pi\right)$. Montrer que $F(1)$ n'existe pas.
- (c) On suppose que $\sum f(n)$ converge.
- i. Montrer que $F(p)$ existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- ii. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$. Prouver l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} F(p) - F(p+1)$ et exprimer sa valeur en fonction de S .

41. (Mines Télécom 2021) (Célian)

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

42. (CCINP 2021)

On pose $a_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $D_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} D_n$ converge.

43. (CCINP 2021)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, vérifiant $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{a_n}$.

Montrer que la suite décroît, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

44. (CCINP 2021)

(a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^p (u_{2i-1} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i$

(b) i. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right).$$

En déduire que $R_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.

(c) i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur \mathbb{R}_+ la fonction $g_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+x}}$.

Montrer que g_n est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+ , et que sa dérivée est croissante.

ii. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

iii. Montrer que la série $\sum R_n$ converge.

45. (Mines Télécom 2021)

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.

Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ et calculer sa somme.

46. (CCINP 2021)

On pose pour tout $n \geq 2$, $u_n = \prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$ et $v_n = \ln \left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

47. (CCINP 2019)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, $w_n = \frac{u_n}{(S_n)^a}$, avec $a \in \mathbf{R}$.

(a) On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$. Donner la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$

(b) On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

i. Que peut-on dire de la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

ii. Donner un équivalent de v_n et w_n . En déduire la nature de $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

(c) On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

i. Montrer que $v_n \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. En déduire la nature de $\sum v_n$.

ii. En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a \leq 1$.

iii. Si $a > 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $w_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^a}$.

iv. En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a > 1$.

48. (CCINP 2019)

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$.

(b) Étudier la nature de la série de terme général $b_n = \ln \left(\frac{\text{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)$.

49. (Mines Télécom 2019)

Nature des séries : (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + \cos(n)}$ (b) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^3(n)}$

50. (CCINP 2019, Mines Télécom 2019)

À l'aide de la formule de Stirling, trouver un équivalent de $\ln n!$. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1 + 1/2 + \dots + 1/n}{\ln(n!)}$.

51. (CCINP 2019)

Soit $n \geq 2$ et on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(a) Nature de $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + a_n)$.

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=2}^n (1 + a_k) \right)$.

52. (Mines Télécom 2019)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

(a) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

(b) Déterminer la limite de la suite (v_n) , avec : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n$.

(c) Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$?

53. (CCINP 2019)

On donne deux réels positifs a et b tels que $b > a$ et on note u_n le terme général d'une suite strictement positive vérifiant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

(a) Déterminer un équivalent de $\ln \frac{n+a}{n+b}$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\infty$ et en déduire la convergence de (u_n) .

(c) On pose $\alpha = b - a$ et $v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est convergente.

(d) Montrer qu'il existe un réel strictement positif A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$.

(e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, au_0 - (n+a+1)u_{n+1} = (b-a-1) \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

(f) Montrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

54. (TPE 2019)

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et discuter la convergence de celle-ci en fonction de la valeur de u_0 .

55. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

Soit $f : x \mapsto \tan(x) - x$.

(a) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de \tan .

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique x_n dans I_n tel que : $f(x_n) = 0$.

ii. Montrer que : $x_n \sim n\pi$.

On pose $y_n = x_n - n\pi$

- (c) i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \text{Arctan}(x_n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.
- ii. Justifier que : $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \sim y_n - \frac{\pi}{2}$. En déduire un équivalent de $y_n - \frac{\pi}{2}$.
- (d) Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{x_n + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}$.
- (e) Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que :

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

56. (Mines Télécom 2019)

Convergence et limite de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=2}^n (2 - \sqrt[k]{3})$.

57. (Mines Télécom 2019)

Étudier la nature de $\sum (\text{Arctan}(n + \alpha) - \text{Arctan}(n))$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

58. (Mines Télécom 2019)

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln \frac{n-1}{n}\right)$.

59. (CCINP 2019)

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $] - 1, 0[$ et en appliquant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

(a) On définit la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Étudier la variations de f . En déduire que l'intervalle $] - 1, 0[$ est stable par f .

(b) Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $] - 1, 0[$ et en déduire que cette suite converge. Préciser sa limite.

(c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$. Exprimer sa somme en fonction de u_0 .

(d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

(e) Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

(f) On pose $a_n = (u_n)^{-1} - (u_{n+1})^{-1}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite, notée L pour le reste de cet énoncé.

(g) On admet que $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ tend vers L quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n . (h) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

60. (CCINP 2019)

(a) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(b) Calculer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

61. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $P_n : x \mapsto -4 + x + x^2 + \dots + x^n$.

(a) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ possède une unique solution sur \mathbb{R}_+ . On la note x_n .

(b) Calculer x_1 et x_2 . Montrer que $x_5 < 1$.

(c) Déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que (x_n) est monotone puis convergente. On note ℓ sa limite.

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x_n)^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{n+1} = 0$. En déduire ℓ .

(e) On pose $d_n = x_n - \ell$. Montrer que $d_n = \frac{(x_n)^{n+1}}{5}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nd_n = 0$.

(f) Montrer que $d_n \sim k\ell^{n+1}$, avec k à déterminer.

62. (Mines Télécom 2019)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n (2 - 3^{1/k})$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

(b) Déterminer sa limite.

(c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que u_n soit équivalent à $\frac{\alpha}{n^{\ln 3}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour la dernière question, on peut poser $v_n = \ln(n^{\ln(3)} u_n)$ et prouver que la série de terme général $v_n - v_{n-1}$ converge.

63. (CCINP 2019)

E_λ ensemble des suites de réels strictement positifs, vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Notons :

si $n \geq 1, v_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $v_0 = 1$,

si $n \geq 2, w_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$ et $w_0 = w_1 = 1$.

(a) Montrer que $(v_n) \in E_\beta$.

(b) i. Montrer que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)$.

ii. En déduire que $(w_n)_n \in E_\lambda$ pour un certain λ à préciser.

(c) i. Donner la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^2} dt$.

ii. Donner la nature de $\sum w_n$. (d) Soit $\lambda > -1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\lambda$. On pose $\beta = \frac{1-\lambda}{2}$.

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

En déduire la nature de $\sum u_n$.

(e) Soit $\lambda < -1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\lambda$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$.

(f) Que se passe-t-il pour $\lambda = -1$?

64. (TPE EIVP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3} \right)$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Indication : $n^2 + 3n + 3 = 1 + (n + 1)(n + 2)$.

65. (TPE-EIVP 2018)

f est une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , positive et croissante. On suppose de plus que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n f(x) dx$

(b) Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$.

(c) Soit $q > 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^n q^k$ et de $\int_0^n q^x dx$. Conclure.

66. (Mines Télécom 2018)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) \right]^n$.

67. (TPE-EIVP 2018)

Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$

68. (CCP 2018)

(a) On étudie une série : montrer que $\sum_{i=1}^p (u_{2i-1} - u_{2i}) = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k-1} u_k$.

(b) i. On étudie la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer qu'elle est convergente.

ii. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{n+2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2k}} \right)$.

iii. Quelle identité obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$?

(c) i. On étudie $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que g_n est deux fois dérivable et que g'_n est croissante.

ii. A l'aide des accroissements finis, montrer que $g_n(2\ell) - g_n(2\ell - 1) \leq g_n(2\ell + 1) - g_n(2\ell)$

(d) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

i. Montrer que $|R_n|$ est décroissante.

ii. En déduire la nature de $\sum R_n$.

(e) Donner la nature de $\sum |R_n|$.

69. (TPE-EIVP 2018)

Posons pour un entier naturel $n : u_n = \text{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3} \right)$.

Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général u_n .

(Ind : utiliser l'identité $n^2 + 3n + 3 = 1 + (n + 1)(n + 2)$)

70. (CCP 2018)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]-1, 0[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(a) Étudier les variations de $f : x \mapsto x + x^2$. Montrer que $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$.

(b) Montrer que pour tout $n, u_n \in]-1, 0[$ et que la suite (u_n) converge. Préciser sa limite α

(c) Nature et somme (en fonction de u_0) de la série $\sum u_n^2$?

(d) Rayon de convergence de la série entière de $\sum u_n x^n$?

(e) Convergence de $\sum (-1)^n u_n$?

(f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Montrer que la suite (a_n) converge et préciser sa limite L .

(g) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = L$. En déduire un équivalent de u_n .

(h) Nature de $\sum u_n$?

71. (Mines-Télécom 2017)

(a) Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries.

(b) $\sum \frac{an^n}{n!}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, est-elle convergente ?

72. (EIVP 2017)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Arctan} \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$, sachant que $n^2 + 3n + 3 = (n + 1)(n + 2) + 1$.

(On pourra utiliser $\tan(a - b)$.)

73. (CCP 2017)

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout élément f de E , on définit la fonction $\phi(f)$ par $\phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$.

On note f_0 la fonction constante égale à 1 puis, pour tout n dans \mathbb{N} , on pose $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

(a) L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?

(b) Pour toute f de E , montrer que $\phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer sa dérivée. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

(c) Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} , la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$. On donnera des relations de récurrence et on exprimera β_n en fonction de n .

(d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est minorée par une constante strictement positive puis obtenir la minoration $\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{4 - 2^{-n}}$.

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ converge et exprimer sa limite.

(e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une certaine fonction f et déterminer cette fonction. La convergence est-elle uniforme ?

74. (CCP 2017)

Soit E l'ensemble des fonctions continues à valeurs positives sur $[0, 1]$ et ϕ l'application de E dans E qui à $f \in E$ associe $\phi(f)$ définie par $\phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$. On considère la suite (f_n) définie par $f_0 = 1$ et la relation de récurrence $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

(a) E est-il un espace vectoriel? Justifier. (b) i. Soit $f \in E$. Montrer que $\phi(f)$ est de classe C^1 et calculer $\phi(f)'$.

ii. ϕ est-elle injective? surjective?

(c) i. Montrer qu'il existe des suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ telles que : $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ pour tout entier n et tout réel $x \in [0, 1]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1$$

ii. Calculer β_n en fonction de n .

(d) Montrer que la suite (α_n) est minorée par une constante strictement positive, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{4 - \frac{1}{2^n}}$$

En déduire que la suite (α_n) converge et donner sa limite.

(e) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.

La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

75. (CCP 2016)

(a) Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(b) Montrer que sa somme S vérifie $\frac{2}{3} < S < 1$ (on pourra étudier $S - 1$ et $S - \frac{2}{3}$ comme séries alternées).

(c) Calculer $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 (-t)^k dt$ et exprimer la somme partielle S_n à l'aide d'une intégrale. Retrouver la convergence de la série et calculer S .

(d) Calculer $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ (on pourra poser $t = \tan x$ ou intégrer par parties).

(e) On note w_n le reste d'ordre n de la série; montrer que $\sum w_n$ converge et calculer sa somme.

76. (CCP 2016)

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) > 0$.

(b) On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

(c) Montrer que $\exists \alpha > 0, \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge, puis que (a_n) converge.

(d) Montrer que $\ln(\sqrt{n}u_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}a_n + \sum_{k=1}^n w_k$ où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la nature de $\sum u_n$.

(e) Montrer que la série de terme général $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$ avec $\lambda > 0$ converge vers v , puis que $v = 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2}$.

77.

78. (Mines Télécom 2016)

(a) Trouver un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite $n \mapsto \sum_{k=1}^n \text{Arctan} k$.

(b) Trouver un développement asymptotique à l'ordre 2, puis à l'ordre 3 de cette suite.

79. (Mines Télécom 2016)

Calculer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (On pourra utiliser une comparaison avec une intégrale)

80. (CCP 2016)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

(a) Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

(b) On pose $\alpha = b - a, v_0 = u_0$ et pour tout $n, v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum_{k \geq 0} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$ converge. Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

(c) On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $u_0 \frac{b-1}{b-1-a}$.

On pourra calculer la somme partielle d'indice N de la série de terme général $n(u_{n+1} - u_n) + bu_{n+1} - au_n$.

81. (CCP 2015)

Soit n appartient à \mathbb{N}^* , a un réel fixé On considère $U_n = (a - (1/n))^{2n}$

Donner la nature de la série de terme général U_n .

82. (Mines Télécom 2015)

Trouver la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-n^2}$.

83. (CCP 2015)

(a) Montrer que la suite de terme général $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ est décroissante.

(b) On admet que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$

Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante. (c) Sachant que $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$, montrer que $a_{n+1} \sim a_n$ au voisinage de l'infini.

(d) Prouvez qu'il existe $K > 0$ tel que $a_n \sim \frac{K}{n^{3/2}}$.

(e) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$ et que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$.

(f) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n = \frac{\pi}{2}$. Montrer que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.

84. (CCP 2015)

$$\text{Soient } d_0 = 1, d_1 = \frac{1}{2} \text{ et } d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

(a) Calculer d_2 et d_3 puis montrer que, pour $n \geq 2$, $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.

(b) Montrer que $|d_n| \leq 1$. Que dire du rayon de convergence de $S(x) = \sum d_n x^{n+1}$?

(c) Donner l'équation vérifiée par $S(x)$ puis montrer que $S(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

(d) Exprimer d_n en fonction de n .

85. (CCP 2015)

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - n \ln(x)$.

(a) Étudier ses variations et montrer que l'équation $(E_n) : x = n \ln(x)$ admet 2 solutions $U_n < V_n$. Montrer que V_n tend vers $+\infty$.

(b) Montrer, pour $n \geq 3$, que $\ln n = \ln V_n - \ln(\ln V_n)$ et qu'un équivalent de V_n en $+\infty$ est $n \ln n$.

(c) Soit $a > 1$; étudier la série de terme général $\frac{1}{V_n^a}$ et montrer que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ ne converge pas.

(d) Soit $a < 1$; montrer que la série de terme général $\frac{1}{V_n^a}$ diverge.

(e) Montrer que $1 \leq U_n \leq e$ et étudier la suite (U_n) .

(f) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de l'infini.

86. (CCP 2015)

Limite de la suite de terme général $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. Nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

87. (CCP 2015)

Soient deux réels a et b tels que $1 + a < b$ et une suite de réels u_n positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ (a) Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln \frac{n+a}{n+b}$ au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

(c) On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et $v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum_{k \geq 0} \ln \frac{v_{k+1}}{v_k}$ converge.

(d) Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.

(e) Étudier la convergence de $\sum u_n$.

88. (CCP 2015)

(a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

(b) On pose $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$; donner l'expression de x_n en fonction de n et trouver sa limite.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit U_n par $U_{n+2} \leq \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$ et $V_n = \max(U_n, U_{n+1})$.

(d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $U_{p+2} \leq V_p$.

(e) Montrer que si $U_{p+1} \leq U_{p+2}$ alors $V_{p+1} \leq V_p$ et en déduire que (V_n) est décroissante.

(f) On suppose que (V_n) diverge; qu'en déduire pour (U_n) ?

(g) On suppose que (U_n) est minorée; qu'en déduire pour (V_n) ?

(h) On suppose que (U_n) est minorée, on note l la limite de (V_n) et on admet que $2l - V_n \leq U_{n+1}$; montrer que (U_n) converge et donner sa limite.

(i) Montrer par l'absurde que $2l - V_n \leq U_{n+1}$.

89. (TPE-EIVP 2015)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{k=0}^n (n+k) \right)^{1/n}$

90. (CCP 2015)

(a) On donne deux suites, de terme général respectif $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

(b) Montrer que $\sum v_n$ converge.

(c) Calculer $\int_0^x te^{-t} dt$.

(d) Montrer que $I_n = \sum_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ existe et vaut $2e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n} - 1)$.

(e) On note $R_n = \sum_{p \geq n+1} v_p$; montrer que $I_{n+1} \leq R_n \leq I_n$ et en déduire un équivalent de R_n en $+\infty$

(f) Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum_{p \geq n+1} u_p \sim \frac{R_n}{\sqrt{e}}$ en $+\infty$.

91. (CCP 2015)

(a) Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^n \frac{\text{Arctan } t}{1+t} dt$ est monotone.

(b) Donner un équivalent de u_n .

92. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t \, dt$ existe.

(b) On admet que $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{1+4(n+1)^2} I_n$.

(c) Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} i_n x^n$ est définie sur $] -1, 1[$.

(d) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-x \sin^2 t} \, dt$

(e) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{(n+1)}{n+2}$.

(f) Montrer que $\frac{1}{n+1} = O(I_n)$ et étudier $\sum I_n$.

(g) Donner la nature de $\sum (-1)^n I_n$ puis montrer que $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{1+4(n+1)^2} I_n$.

93. (CCP 2015)

(a) On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $u_{n+1} = \sin u_n$ et $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+\sin t}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ puis que (u_n) converge et donner sa limite.

(c) Montrer que (v_n) est bien définie et converge vers 0.

(d) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \lambda u_n^3$ quand n tend vers $+\infty$ et donner la nature de $\sum u_n^3$.

(e) Montrer que $\sum u_n^2$ diverge (on pourra étudier $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$).

(f) Montrer, à l'aide d'un encadrement de v_n , que $u_n \sim v_n$ puis donner le rayon de convergence R de $\sum v_n x^n$.

(g) Donner la nature de $\sum v_n R^n$ et $\sum v_n (-R)^n$.

94. (CCP 2015)

(a) On donne $u_0 \in]-1, 0[$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(b) En étudiant $f(x) = x + x^2$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-1, 0[$.

(c) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(d) Montrer que $\sum u_n$ converge et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de u_0 .

(e) Montrer que le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ vaut 1.

(f) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(g) Montrer que la suite de terme général $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ converge vers une limite l à préciser.

(h) On admet que $\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n a_p$ tend vers l ; déterminer un équivalent de u_n et en déduire la

nature de $\sum u_n$. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n a_p$ tend vers l

95. (CCP 2015)

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de $f_n(x) = x - n \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Montrer que $\forall n \geq 3$, l'équation $x = n \ln x$ admet deux solutions $u_n < v_n$.

(c) Montrer que (v_n) tend vers $+\infty$ et que $\ln n = \ln v_n - \ln(\ln v_n)$.

(d) En déduire que $v_n \sim n \ln n$ en l'infini.

(e) Soit $a > 1$, montrer que la série de terme général $\frac{1}{v_n^a}$ converge.

(f) Montrer la divergence de la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ et en déduire la divergence de la série de terme général $\frac{1}{v_n^a}$ pour $a \geq 1$.

(g) Montrer que $1 \leq u_n \leq e$, que $\forall n \geq 3$, la suite (u_n) converge et indiquer sa limite.

(h) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de l'infini.

96. (CCP 2015)

(a) Si (u_n) est une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge, on note $R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$

et $v_n = \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ pour $\alpha > 0$

(b) On choisit $u_n = \frac{1}{2^n}$; montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer R_n .

(c) Donner la nature de $\sum v_n$ en fonction de α .

(d) Dans le cas général, exprimer v_n en fonction de R_n, R_{n-1} et α .

(e) Donner la nature de $\sum v_n$ pour $\alpha = 1$ (on pourra poser $w_n = \ln(1 - v_n)$).

(f) Montrer que, pour $\alpha > 1, \exists N \in \mathbb{N}^*, R_{n-1}^\alpha \leq R_n$ et en déduire la convergence de $\sum v_n$

Donner la nature de $\sum v_n$ pour $0 < \alpha < 1$ (on pourra étudier $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt$).

97. (CCP 2015)

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

98. (CCP 2015)

(a) On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1}) \frac{1}{n}$; on pose $x_k = u_k^{k-1}$.

Calculer $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

(b) Calculer $x_{k+1} - x_k$ et montrer que $\forall n \geq 1, x_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

(c) Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{x_k} \leq 3$.

(d) Exprimer $\ln(u_n)$ en fonction de n et montrer que, quand n tend vers $+\infty$, $\ln(u_n) \sim \frac{2(\ln n)^r}{n^s}$ où r et s sont des réels à déterminer. (e) Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln(u_n)$?

Manque deux questions.

99. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\forall t \geq -1, \ln(1+t) \leq t$.

(b) Pour $n \geq 2$ et $a > 0$, on note $u_n(a) = \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^a}\right)$.

(c) Étudier la suite pour $a = 2$; montrer qu'il existe un réel μ tel que $u_n(2) = \mu \frac{n+1}{n}$ et en déduire la limite de la suite. Qu'évoque ce résultat ?

(d) Étudier la convergence de la suite dans le cas général.

(e) Donner la nature de $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{p^a}\right)$ et en déduire la limite de $(u_n(a))$.

Manque questions faisant intervenir $F_p(a)$ dont le candidat ne se souvient pas.

100. (ENSIIE 2015)

Étudier $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n+1}$

101. (Navale 2015)

(a) On note $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$; trouver une relation entre u_{n+2} et u_n .

(b) Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(c) Donner la nature des séries de terme général $(-1)^n u_n$ et $\frac{u_n}{n^\alpha}$ suivant α .

102. (Mines Télécom 2015)

Nature, en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}$, de $\sum \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right)^n$.

103. (Mines Télécom 2015)

Nature de la série de terme général $\sin(2 \operatorname{Arctan} n)$.

104. (Mines Télécom 2015)

(a) On note $S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$

(b) Montrer que $\exists z \in \mathbb{C}, S_n \leq \left| \frac{2}{1-z} \right|$.

(c) Donner les variations de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ sur $]2, +\infty[$.

(d) En remarquant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, exprimer $s_n = \sum_{k=1}^n f(k+1)S_k$ en fonction de

$$\sum_{k=2}^{n-1} (f(k+1) - f(k))S_k$$

(e) Conclure.

105. (Mines Télécom 2015)

Étudier $\sum \frac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$

I.5. Suites et séries de fonctions.

118 bis. (Mines-Ponts 2023 sans préparation) (Martin)

$$\text{Soit } f : a \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-n^a}}{n}.$$

- a) Donner le domaine de définition de f .
 b) Donner les limites aux bornes de son domaine de définition de f .
 + question

118 ter. (CCINP 2023 avec préparation) (Martin)

On pose $\forall x \in [0, 1]$, $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$ avec (a_n) une suite réelle décroissante.

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq u_n(x) \leq a_1 x^n (1 - x)$; en déduire que $\sum u_n$ converge simplement.

b) Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ dans les cas suivants :

(i) $a_n = 1$ (ii) $a_n = \frac{1}{n}$ (iii) $a_n = \frac{1}{2^n n!}$.

c) (i) Donner un équivalent simple de $x_n^n (1 - x_n)$ avec $x_n = \frac{n}{n+1}$.

c) (ii) Montre que $\sum u_n$ converge normalement ssi $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

d) On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}$.

e) En déduire une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que $\sum u_n(x)$ converge uniformément.

119. (CCINP 2022) (HuangBeiYue)

Etudier les modes de convergence de $\sum \frac{\sin(nx)}{n!}$.

119 bis. (CCINP 2023 - avec preparation) (Lea)

Soit :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad W_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

1. Etudier la convergence et la convergence absolue de (u_n) et (v_n) .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

4. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, donnez un équivalent simple de R_n .
5. ??

120. (CCINP 2022) (Mohamed) Avec préparation

Soit f_0 continue sur \mathbb{R} . On définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

(a) i. Donner le rayon de convergence et la valeur de la somme de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

ii. Montrer que f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner la valeur de f_1' .

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On admet que $\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [-a, a], |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$ (\star).

(c) Montrer que $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

(d) Montrer que $F' - F = f_0$.

(e) Montrer que $F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t) dt$.

(f) Bonus : Montrer (\star)

121. (CCINP 2022) (Rujdy) Avec préparation.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

On note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

(a) Énoncer le théorème spécial des séries alternées avec le signe et la majoration du reste.

(b) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

(c) i. Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}$.

En déduire que $\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x+1)(n+x)}$.

ii. Montrer que $\forall x > 0, \left| f(x) - \frac{1}{2x} \right| \leq \frac{1}{2(x+1)x}$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

(d) Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ .

(e) Montrer que $\int_0^1 \dots dt$

122. (CCINP 2021) (Amina)

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

(b) i. Montrer que f_1 est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer f_1' .

ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^n .

On admet provisoirement la propriété suivante :

$$\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, a], |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$$

- (c) i. Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
 ii. Montrer que $F' - F = f_0$.
 (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t} dt$
 (e) Prouver la propriété admise.

123. (CCINP 2021)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- (a) Énoncer le critère spécial des séries alternées avec majoration et signe du reste.
 (b) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
 (c) i. Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+x+1}$.
 ii. En déduire que $\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+x+1)(n+x)}$.
 iii. Montrer que $\left| f(x) - \frac{1}{2x} \right| \leq \frac{1}{2(x+1)x}$.
 En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
 (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
 (e) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

124. (Mines Télécom 2021)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (\text{a}) \text{ Soit } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \alpha < \beta.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \beta]$?

- (b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?

125. (CCINP 2021)

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

- (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

- (b) i. Montrer que f_1 est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer f_1' .
 ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^n .

On admet provisoirement la propriété suivante :

$$\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, a], |f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

- (c) i. Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

ii. Montrer que $F' - F = f_0$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t} dt$

(e) Prouver la propriété admise.

126. (CCINP 2021) Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \cos^n t dt$.

(a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?

(b) i. Calculer $J_n(1)$.

ii. Soit x tel que $-1 < x \leq 1$. Montrer que $J_n(x) \geq J_n(1)$. En déduire la nature de $\sum J_n(x)$, quand $-1 < x \leq 1$

(c) i. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t) \sin^b t \cos^n t$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Montrer que J_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(d) Soit $g_x(t) = \frac{\sin^x t}{1 - \cos t}$ où $x > 1$. Montrer que g_x est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\int_0^{\pi/2} g_2(t) dt$

(e) En déduire la nature de $\sum J_n(x)$.

127. (CCINP 2021)

Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

(a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I .

(b) Déterminer les limites de f en -1 et $+\infty$.

128. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$. (a) Montrer que les f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

129. (TPE 2019)

Trouver un équivalent de $u_n = \int_0^n \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$, à l'aide d'un changement de variable.

130. (Navale 2019)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_n : x \mapsto n^\alpha x^2 e^{-nx}$ et $g_n : x \mapsto n^\alpha \sin(x) e^{-nx}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Étudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) et (g_n) .

131. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n + x^2}$.

Étudier la convergence simple/uniforme/normale sur \mathbb{R} de $\sum f_n$.

132. (CCINP 2019)

Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ est \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1 [$ et calculer $f'(x)$

133. (CCINP 2019)

On note (a_n) une suite décroissante et positive et on pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq a_1 x^n (1-x)$ et en déduire que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

(b) Que vaut $\sum u_n$ si : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$? Si $a_n = \frac{1}{n}$? Si $a_n = \frac{1}{2^n n!}$?

(c) On note $x_n = \frac{n}{n+1}$; trouver un équivalent de $x_n^n (1-x_n)$.

(d) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

(e) Montrer que $0 \leq \sum_{k \geq n+1} a_k x^k (1-x) \leq a_{n+1}$.

(f) À quelle condition, nécessaire et suffisante sur (a_n) , $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

134. (CCINP 2019)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$

(a) Déterminer le domaine de définition de f . Montrer que la série de fonctions ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Montrer que $f - 1$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Exprimer $\int_0^{+\infty} (f - 1)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

(d) Montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^*

(e) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$. Déterminer un équivalent de f en 0^+ . On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(f) Démontrer l'encadrement admis dans la question précédente.

135. (Mines Télécom 2019)

(a) Calculer $\int_0^1 x^{3n+1} dx$

(b) Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$ et calcul de la somme.

136. (Mines Télécom 2019)

Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

137. (CCINP 2019)

Soit $t \in \mathbf{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

(c) Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$.

138. (CCINP 2019)

E est l'ensemble des applications croissantes de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x} \text{ avec } f(1) = 0.$$

$$\text{On pose } u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

(a) Montrer que pour $x > 0$, $u_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrer que $\sum u_n(x)$ converge.

$$\text{On pose alors } u(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ pour tout } x > 0.$$

(b) i. Montrer que u est croissante en revenant à la définition.

ii. Montrer que $u \in E$.

(c) i. Montrer que u est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

ii. Soit $x \in]0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f, g \in E$. Montrer les inégalités : $f(n) - g(n+1) \leq f(x+n) - g(x+n) \leq f(n+1) - g(n)$.

(d) Avec les mêmes notations que précédemment, on pose $\delta = f - g$.

i. Montrer que $\delta(x+n) = \delta(x)$.

En utilisant les inégalités précédentes, préciser la limite de la suite $(\delta(x+n))_n$

ii. Montrer que $f = g$.

Que peut-on en conclure sur E ?

139. (CCP 2018)

(a) Soit $x \in [0, 1]$. Donner les variations sur $[0, 1]$ de $g_x(t) = t + \frac{x-t^2}{2}$.

(b) Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$, qu'elle est décroissante et en déduire qu'elle converge vers une limite à déterminer.

(c) On donne $P_0(x) = 1$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$. Montrer que P_n est dérivable, que $P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x))$ puis que $P_n(x)$ est croissante.

(d) Montrer que $P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left(1 - \frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}\right)$ et en déduire par récurrence que $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$

(e) Montrer que (P_n) converge uniformément vers une fonction à déterminer.

140. (CCP 2018)

$$\text{Soit : } I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-x^n) dx$$

(a) Soit $n > 0$, montrer que I_n existe.

(b) Montrer que $(I_n)_{n>0}$ converge.

141. (CCP 2018)

$$\text{On définit pour } x > 0 : G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$$

- (a) Sur quel intervalle G est-elle définie ? Sur quel intervalle G est-elle continue ?
 (b) Montrer que G est de classe C^1 et calculer $G'(x)$.

142. (CCP 2018)

E est l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On définit une suite de fonctions par $f_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- (a) Rayon de convergence, valeur de la somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$.
 (b) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^n .
 (c) On admet la propriété suivante :
 (*) $\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$.

Montrer que $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est C^1 sur \mathbb{R} .

Montrer que $F' - F = f_0$.

(d) Montrer que F est la fonction $x \mapsto e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} dt$.

(e) Démontrer la propriété (*).

143. (CCP 2018)

f est une fonction de classe C^1 , positive, croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

(a) Montrer qu'on définit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par :

$$u_0 = f; \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_{n+1}(x) = \int_0^1 u_n(xt) dt$$

(b) Montrer que pour tout n la fonction u_n est croissante sur $[0, 1]$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$.

(d) Montrer que la suite (u_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction notée L .
 Montrer que L est croissante.

(e) Montrer que pour tout n, u_n est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que pour $n \geq 1, u'_n(x) = \int_0^1 t u'_{n-1}(xt) dt$

(f) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $x > 0, u'_n(x) = \frac{u_{n-1}(x) - u_n(x)}{x}$.

(g) Montrer qu'on a $x \sum_{k=1}^N u'_k(x) \leq f(x)$. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\sum u'_n$?

(h) Montrer que L est une fonction constante.

144. (Mines Télécom 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et on pose $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

(a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$. (b) La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Pour tout a dans $]0, 1]$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge.

(d) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. On pourra effectuer un changement de variable.

145. (CCP 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

(a) Énoncer le théorème des séries alternées dans sa totalité.

(b) Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(c) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$.

(d) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

(e) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(f) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

(g) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

146. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

147. (EIVP 2017)

(a) Domaine de définition D de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx^2}$

(b) Y a-t-il convergence normale sur D ?

(c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .

148. (CCP 2017)

Existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

149. (CCP 2017)

Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

150. (CCP 2017)

Soit $f_k(x) = \frac{k^2}{k^2+1} x e^{-kx}$. Montrer que $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, +\infty[$; $\sum f_k$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

151. (CCP 2017)

Étudier la série de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

152. (CCP 2017)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente, et $(b_n)_n$ une suite d'entiers naturels.

Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi b_n x)$

(a) Montrer que la série définissant f converge normalement sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $[-1, 1]$.

(c) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

(d) Montrer que $S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$ converge et déterminer sa limite.

(e) Montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2ib_n \frac{k}{N}\right)$ vaut N si N divise b_n et 0 sinon.

Notons $I_n = \{n \in \mathbb{N}^*/N \mid b_n\}$

Montrer que $S_N = \sum_{n \in I_N} a_n$

(f) On choisit $b_n = n!$ et $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^*/n \geq N\} \subset I_n$ puis que $NS_N \rightarrow +\infty$

153. (CCP 2017)

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

(a) Rappeler le critère des séries alternées avec la majoration du reste et son signe.

(b) i. f est-elle bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* ?

ii. Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$.

(c) Montrer que : $\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$

(d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$

(e) Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

(f) Montrer que : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

154. (Mines-Télécom 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1/\operatorname{ch}(x^n)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) La convergence est-elle uniforme ?

155. (TPE-EIVP 2017)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx^2}$

(a) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f . (b) Y-a-t-il convergence normale sur \mathcal{D}_f ?

(c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans \mathbb{R}_+^* .

156. (CCP 2017)

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- (a) Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
 (b) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
 (c) Montrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. [Hors programme PC ?]

157. (CCP 2017)

Soit a un réel, x dans $[0, 1]$ et f_n définie pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$.

- (a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
 (b) Étudier la convergence uniforme.

158. (Mines Télécom 2017)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

- (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.
 (b) La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Soit $a \in]0, 1]$. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur $[a, 1]$.
 (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 (d) Déterminer un équivalent de u_n . (On pourra effectuer un changement de variable).

159. (TPE-EIVP 2016)

Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

160. (EIVP 2016)

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + n\alpha}$ où $\alpha > 0$ converge et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^\alpha}$

161. (EIVP 2016)

On donne $f_n(x) = \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1 + x^2)}$; montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge.

Montrer que la suite de terme général nI_n converge et donner sa limite.

162. (Mines Télécom 2016)

Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.

163. (ENSEA 2016)

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^2 x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$,
 $f_n(x) = 1 - nx$ si $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ partout ailleurs.

Donner, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

164. (Mines Télécom 2016)

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- (a) Montrer que $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

(b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Montrer que pour $x > 0$: $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

165. (Mines Télécom 2016)

Pour $n > 0$ et x réel on pose $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$.

(a) Déterminer le domaine de convergence simple de $\sum u_n$.

(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme.

166. (EIVP 2016)

Donner un équivalent de $u_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$.

167. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$

168. (CCP 2015)

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-x^n) dx$.

(a) Mq I_n existe.

(b) Mq la suite (I_n) converge.

169. (Mines Télécom 2015)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx) + \exp(-nx)}{1 + nx^4 + n^2}$ est définie et continue sur son ensemble de définition.

170. (Mines Télécom 2015)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$, et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition.

Calculer $S'(1)$.

171. (Mines Télécom 2015)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Montrer que f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ , et calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$.

172. (Mines Télécom 2015)

Soit la suite de fonctions (f_n) définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$.

(a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de terme général f_n .

(b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de terme général f_n .

173. (Mines Télécom 2015)

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

(a) Montrer que $\int_0^1 dt/\sqrt{-2\ln t} = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ en posant $x = \sqrt{-\ln t}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier le changement de variable $x = (\cos t)^n$ dans l'intégrale $w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$ (c) Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto 1/\sqrt{n(t^{-2/n} - 1)}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{-2\ln t}$, et en déduire, grâce au théorème de convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

174. (CCP 2015)

Montrer que $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

175. (CCP 2015)

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$; trouver une relation entre I_n et I_{n+2} , puis montrer que $\sum I_n$ converge et calculer sa somme.

176. (CCP 2015)

(a) Pour $n \geq 2$, étudier les variations de $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ sur \mathbb{R}_+ et donner ses limites aux bornes.

(b) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

(c) $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $]1, +\infty[$? Y a-t-il convergence normale?

(d) Étudier les variations et donner les limites de $S = \sum f_n$ sur $]1, +\infty[$.

(e) Montrer que f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

(f) Nature, pour $a \geq 2$, de $\sum I_n(a)$ avec $I_n(a) = \int_a^{+\infty} f_n(x) dx$.

177. (TPE-EIVP 2015)

Calculer $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

178. (CCP 2015)

Existence de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{(-x)^n} dx$; la suite (I_n) converge-t-elle?

179. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ existe.

(b) Donner les développements en série entière de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$ et en déduire l'expression de I comme une somme.

(c) Rappeler les théorèmes d'interversion des signes \sum et \int .

180. (CCP 2015)

Montrer que $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_0^{nx+x} f_n(x)dx$.

181. (TPE-EIVP 2015)

(a) Étudier les convergences simple et uniforme de la série de terme général $u_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ pour $n \geq 1$

(b) On note $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k))$; montrer que $S_{2p} = \ln\left(\frac{2p+1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)$.

(c) Montrer que $\binom{2p}{p}^2 \frac{1}{2^{2p}} \sim \frac{??}{\sqrt{2\pi}}$ en $+\infty$.

(d) Calculer la somme de S_{2p} et en déduire celle de S_n .

182. (Mines Télécom 2015)

(a) Montrer que $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx+x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Montrer que la suite de terme général $\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$ a une limite finie que l'on déterminera.

183. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{1 + (nx \ln n)^2}$ converge absolument mais pas normalement. Y a-t-il convergence uniforme? Montrer que la somme est nulle.

184. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx+x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

185. (Mines Télécom 2015)

Cours : énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale pour les séries de fonctions, sur un intervalle quelconque.

I.6. Séries entières.

185 bis. (Mines Tel 2023) (Charles)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle bien définie?

b) Déterminer la limite de (u_n) .

c) Montrer par un changement de variable qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{n}$.

d) Déterminer le rayon de convergence, ce R de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n x^n$.

e) Que se passe-t-il en R ? et en $-R$?

186. (Mines Telecom 2022) (Juliette)

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \ln(x^2 + 4x + 3)$.

186 bis. (CCINP 2024 - avec preparation) (Keira)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, développable en série entière dans $] -r; r[$ et pour $\alpha > 0$ et tout $x > 0$

$$(E) \quad y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Soit } T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x x u^{\alpha-1} f(u) du.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène : $y' + \frac{\alpha}{x}y = 0$.
2. a. Montrer qu'il existe $M_x \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M_x$.
b. Montrer que $u^{\alpha-1}f(u)$ est négligeable sur $]0, x]$
3. Montrer que $T_\alpha(f)$ est solution de (E). En déduire la forme générale de la solution.
4. Montrer qu'il existe une suite (a_n) tel que $T_\alpha(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha n}{n+a} x^n$. (??)
5. ?

187. (ENSEA Cergy 2022) (Paul)

(a) Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

- (b) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \text{ch}(x)$ et l'intervalle où il est valable.
(c) Déterminer une expression de $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

187 bis. (Mines Tel 2024) (Lea)

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

- (a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum u_n$ converge. On notera D_f cet ensemble.
(b) Etudier la convergence normale et la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur D_f .
(c) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est-elle continue ?

188. (CCINP 2022) (Matthieu) Avec préparation.

Soit $f(x, t) = \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos t + 1}$, pour $x \in]0, 1[, t \in]0, \pi[$. On pose $f(1, 0) = 1$.

Introduction : On admet que $x \mapsto f(x, t)$ est développable en série entière à son origine,

on pose $f(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$

On souhaite calculer $I = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - \cos t} dt$. On pose $F(x) = \int_0^\pi f(x, t) dt$.

(a) Montrer que I est bien définie.

On pose $F(1) = \int_0^\pi f(1, t) dt = \frac{I}{2}$

(b) Trouver une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0(t) = 0, u_1(t) = t \sin t$ et $\forall n \geq 2, u_n(t) - 2 \cos(t)u_{n-1}(t) + u_{n-2}(t) = 0$, pour $t \in]0, \pi[$.

La relation précédente reste-t-elle valable pour $t \in [0, \pi]$?

(c) En remarquant que $\forall (x, t) \in]0, \pi[$, $(x^2 - 2x \cos t + 1) f(x, t) = xt \sin t$, déterminer $a_n(t)$ et montrer que le rayon de convergence $R_T \geq 1$. (d) Montrer que F est continue sur $[0, \pi]$. Indication : on remarque que $x \mapsto f(x, t)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$.

(e) En déduire I .

189. (CCINP 2022) (Paul, Johan, Valentin) Avec préparation

Soit F l'ensemble des fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\sqrt{x})$$

Soit G l'ensemble des fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right)$$

(a) Montrer que G est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(b) i. Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g appartient à G .

ii. Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$. Montrer que f appartient à F .

(c) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$. On

suppose que $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \in G$

$$\text{Montrer que } na_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!}$$

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \frac{2^n}{n!}$

(e) ? Montrer l'existence d'un isomorphisme entre F et G ?

(f) ?

190. (Mines Télécom 2021) (Juliette)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

(a) Trouver le rayon de convergence de cette série entière, que l'on notera R .

(b) Montrer que S vérifie, pour $x \in]-R, R[$, $(1 - 4x)S'(x) - 2S(x) = 0$.

(c) Trouver l'expression complète de S .

191. (CCINP 2021) (Tamina)

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

(a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(b) i. Montrer que F est impaire et croissante.

ii. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ est finie.

(c) Montrer que F admet un développement en série entière de la forme $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} a_n$.

On précisera a_n et le rayon de convergence.

(d) Exprimer $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $F(1)$

(e) Question manquante.

192. (CCINP 2021) (Ziyad)

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(c) i. Montrer que, pour $N > 0$, $\sum_{n=0}^N (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} dx - v_N$, où $v_N = \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1} \sin(\pi x)}{1+x} dx$.

ii. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} dx$.

(d) Déterminer a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a - b(n+2)(n+1)u_n$.

(e) Donner le domaine de définition de : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

193. (CCINP 2021)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln n x^n$.

194. (Mines Télécom 2021)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer l'existence du développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

(b) Donner ce développement en série entière, et déterminer son rayon de convergence.

195. (ENSEA 2021)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(b) On pose $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe a tel que $\ln v_n = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(c) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

(d) Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ admet pour ensemble de définition $[-1, 1]$.

196. (CCINP 2019)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n}$.

197. (CCINP 2019)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} x^n$.

198. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

(a) Discuter l'existence de I_n . Calculer I_0 et I_1 .

(b) i. Étudier les variations de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ii. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$.

(c) i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

ii. Préciser la nature de $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$.

(d) Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

(e) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$ et on pose : $\forall t \in [1, e], f_n(t) = t(\ln(t))^n x^n$.

i. Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[1, e]$.

ii. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'intégrale.

199. (CCINP 2019)

On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln nx^n$ et \mathcal{D} son ensemble de définition.

(a) Montrer que $] -1, 1[\subset \mathcal{D}$.

(b) i. Montrer que $] -1, 1[= \mathcal{D}$.

ii. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$ converge.

(c) Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.

(d) Prouver l'existence de $L \in \mathbb{R}$ tel que $(1-x)S(x) = -x \ln(1-x) + L + o(1)$ au voisinage de 1.

(e) Que peut-on dire de $\int_0^1 S(x) dx$?

200. (Mines Télécom 2019)

(a) Montrer que, si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $4y'' + 2y' + y = 0$, alors $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.

(b) Trouver, sans utiliser le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $y(x)$. Que peut-on en conclure ?

(c) Montrer que $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation sur \mathbb{R}_+ , à l'aide des développements en série entière connus.

(d) Montrer que $\sin \sqrt{x}$ est solution sur \mathbb{R}_+^* .

201. (CCINP 2019)

On pose $U_0 = 1, U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}, V_n = \frac{U_n}{n!}$

- (a) Calculer V_0, V_1, V_2, V_3 puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et n .
 (b) Montrer que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.
 (c) On note $S(x)$ la somme de la série $\sum V_n x^n$, calculer son rayon de convergence.
 (d) Déterminer une équation différentielle dont S est solution.
 (e) Montrer que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera et exprimer son développement en série entière en fonction de V_n .
 (f) Sur quel intervalle f est-elle égale à la somme de la série trouvée ?

202. (Mines Télécom 2019)

- 1) Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k}$
 (a) Nature de f .
 (b) Étude de la continuité de f .
 (c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
 2) (a) Résoudre $xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 (b) Donner les solutions définies sur \mathbb{R} .

203. (Mines Télécom 2019)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.

Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini.

204. (CCINP 2019)

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et r un réel tel que

$$|z| < r < R. \text{ On note } I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r e^{it} f(r e^{it})}{r e^{it} - z} dt$$

- (a) Montrer que $r e^{it} - z$ ne s'annule pas pour tout t réel.
 (b) Montrer que $I(r)$ existe.
 (c) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n e^{-int}}{r^n}$ converge et que $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n e^{-int}}{r^n} = \frac{r e^{it}}{r e^{it} - z}$.
 (d) i. Montrer que $I(r) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt$, avec $u_n(t) = \sum_{k=0}^n z^k a_{n-k} r^{n-2k} e^{i(n-2k)t}$ (on pourra remarquer que $u_n = \sum_{k=0}^n v_k w_{n-k}$ avec $v_k = \frac{z^k}{r^k e^{ikt}}$ et $w_k = a_k e^{ikt} r^k$).
 ii. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
 iii. Calculer $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt$ et en déduire que $I(r) = 2\pi f(z)$.

205. (Mines Télécom 2019)

Ensemble de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \sin \left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}} \right)$?

206.

207. (CCINP 2019)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n}$.

208. (CCINP 2019)

On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln nx^n$ et \mathcal{D} son ensemble de définition.

(a) Montrer que $] -1, 1[\subset \mathcal{D}$.

(b) i. Montrer que $] -1, 1[= \mathcal{D}$. ii. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$ converge.

(c) Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$ est continu sur $[-1, 1]$.

(d) Prouver l'existence de $L \in \mathbb{R}$ tel que $(1-x)S(x) = -x \ln(1-x) + L + o(1)$ au voisinage de 1.

(e) Que peut-on dire de $\int_0^1 S(x) dx$?

209. (CCP 2018)

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$

210. (CCP 2018)

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$

211. (Mines Télécom 2018)

On définit f par $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$

(a) Montrer que f est développable en série entière.

(b) Montrer que f est solution d'une ED linéaire d'ordre 1.

(c) Donner le développement en série entière de f .

212. (Mines Télécom 2018)

Calculer la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sum_{k=0}^n U_k U_{n-k}$.

On posera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n$ pour $x \in] -R, R[$.

213. (CCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

- (c) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, obtenir une relation de la forme $\sum_{n=0}^N (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} dx - v_N$ en précisant l'expression de v_N .
- (d) En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x} dx$.
- (e) Trouver deux constantes a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a + b(n+2)(n+1)u_n$.
- (f) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

214. (CCP 2018)

On considère la série entière $\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

215. (Mines-Télécom 2017)

On donne $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq n+1$ et en déduire le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$
- (b) Montrer que sa somme S vérifie $(2-x)S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

216. (EIVP 2017)

On donne $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

- (a) Montrer que $1 \leq a_n \leq n^2$.
- (b) Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.
- (c) Montrer que, sur $] -R, R[$, sa somme S vérifie $(1-x)y' - (1+2x)y = 1+2x$.
- (d) Trouver une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

217. (CCP 2017)

On donne f_0 continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et on pose $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- (a) Donner le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^n}{n!}$.
- (b) Montrer que f_1 est \mathcal{C}^1 et calculer f_1' . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe \mathcal{C}^n .
- (c) On admet que (*) : $\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |x| \leq a \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!}$.

Montrer que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- (d) Montrer que $F' - F = f_0$ et que $F(x) = e^x \int_0^x f_n(t) e^{-t} dt$.
- (e) Montrer la propriété (*).

218. (CCP 2017) Convergence et somme de $\sum \text{ch}(n)x^n$.**219.** (CCP 2017)

On considère la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

(a) Montrer que cette suite converge.

(b) Soit $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Que peut-on conclure ?

(c) Montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n \sim C \frac{1}{n^{3/2}}$.

(d) Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que S est définie sur $[-1, 1]$.

(e) Déterminer une équation différentielle du 1er ordre vérifiée par S .

(f) Donner une expression de $S(x)$ sur $]0, 1]$. On pourra résoudre l'équation différentielle et fixer la constante grâce à un DL3 en 0 de arctan.

220. (Mines Télécom 2017)

Rayon de convergence de somme de la série entière de terme général $\frac{x^n}{2n+1}$.

221. (CCP 2017)

On considère la série entière $\sum \text{ch}(n)x^n$. Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

222. (Mines Télécom 2017)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$. Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

223. (CCP 2016)

Soit $\phi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$. On admet le DL suivant : $\phi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

(a) Calculer $\phi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

(b) On définit, par récurrence la suite (P_n) , par : $P_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$.

Calculer P_1, P_2 et P_3 .

(c) Montrer que $P_n \leq n!$

(d) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est différent de 0.

(e) Prouver que $f'(x) = \exp(x) \times f(x)$

(f) En déduire le DSE de ϕ .

224. (CCP 2016)

(a) Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ est définie sur $] -1, 1[$.

(b) Montrer que $(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

(c) Montrer que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$. Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.

(d) Montrer que $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.

(e) Montrer que $\exists l \in \mathbb{R}, (1-x)S(x) = -x \ln(1-x) + l + o(1)$ au voisinage de 1^- .

(f) Nature de $\int_0^1 S(x) dx$.

225. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x, t) = e^{x \sin t}$ est développable en série entière.

(b) Montrer que $g(x) = \int_0^{\pi/2} f(x, t) dt$ est développable en série entière, à l'aide de $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$; on précisera le théorème utilisé.

226. (ENSEA 2015)

(a) Rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que S est solution de l'équation différentielle $y'' - 2 \cos \theta y' + y = 0$ et en déduire $S(x)$.

227. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\sum \frac{t^n}{(n!)^2}$ a un rayon de convergence infini.

On notera $J(t)$ sa somme.

(b) Montrer que $\forall t \geq 0, J(t) \geq 1$ et que $J(t) - 1 \sim t$ au voisinage de 0 .

(c) Montrer que $N(t) = J(t) \int_1^{+\infty} \frac{du}{uJ(u)}$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

(d) Montrer que $N(t) - J(t) \ln(t) = J(t) \int_t^1 \frac{J^2(u) - 1}{uJ^2(u)} du$.

(e) Montrer que J est solution de $E : ty'' + y' - y = 0$.

(f) On pose $Z = \frac{y}{J}$; montrer que y est solution de E si et seulement si Z' vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on résoudra.

(g) En déduire les solutions de E .

228. (CCP 2015)

Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{n}{n+1} x^n$.

229. (CCP 2015)

Rayon de convergence et somme de $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

230. (CCP 2015)

(a) On définit une suite par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n$.

(b) On note respectivement R et S le rayon de convergence et la somme de $\sum u_n x^n$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum 3^n x^n$.

(d) Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$; calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$ puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3^n$ et en déduire que $R > 0$.

(f) Montrer que, pour $x \in]-R, R[$, $S(x) = \frac{x-1}{P(x)}$.

(g) Exprimer u_n en fonction de n (on pourra utiliser $P(x) = \frac{1}{S}(x-1)$).

(h) Exprimer $u_{n+2} + u_n$ en fonction de n et retrouver ainsi u_n .

231. (CCP 2015)

(a) Soient une suite de réels (a_n) telle que $\sum a_n$ converge et $R_n = \sum_{k \geq n} a_k$.

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=n}^N (R_k - R_{k+1}) (1 - x^k) = R_n (1 - x^n) + \sum_{k=n+1}^N R_k (x^{k+1} - x_k) + R_{k+1} (x^N - 1).$$

(c) Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$.

(d) Montrer que $\sum a_n (1 - x^n)$ converge pour $x \in [0, 1]$ et en déduire que $\sum (R_k - R_{k+1}) (1 - x^k)$ converge.

(e) Montrer que $\sum_{k \geq n} (R_k - R_{k+1}) (1 - x^k) = R_n (1 - x^n) + \sum_{k \geq n+1} R_k (x^{k-1} - x^k)$. (f) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k \geq n} (R_k - R_{k+1}) (1 - x^k) \right| \leq \varepsilon$$

(g) $f(x) = \sum a_n x^n$ est-elle continue? En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum a_n$.

(h) Convergence et somme de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

232. (CCP 2015)

(a) On note \mathcal{S} l'ensemble des suites réelles; soit $A = (a_n) \in \mathcal{S}$; $A \in \mathcal{C}$ si la série de terme général $(\sum a_n)$ converge.

(b) On dira que A vérifie la propriété \mathcal{P} si et seulement si la série entière $(\sum a_n x^n)$ a un rayon de convergence ≥ 1 et si $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe et vaut $\ell(A)$.

(c) Montrer que \mathcal{C} est un sous espace vectoriel de \mathcal{S} . Les suites de terme général $\frac{1}{n!}$ et $(-1)^n$ sont elles dans \mathcal{C} ? La suite de terme général $\frac{1}{n!}$ vérifie-elle \mathcal{P} ?

(d) Si oui calculer ℓ pour cette suite. Mêmes questions pour $(-1)^n$.

(e) On choisit $A \in \mathcal{C}$ à termes positifs.

(f) Montrer que $\forall x \in [0, 1[, \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^N a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et en déduire que $\sum_{k=0}^N a_k \leq \ell(A)$

(g) Montrer que si A vérifie \mathcal{P} , alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \ell(A)$. Manque dernière question.

233. (CCP 2015)

(a) On note F l'ensemble des fonctions continues de $] - 1, 1[$ dans \mathbb{R} , telles que $f(x) = \frac{p(x)}{1 - x^3}$ où $p \in \mathbb{R}_2[X]$

(b) Montrer que $\forall x \in] - 1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} x^{3n}$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{1 - x^3}$.

(c) On note $h_k(x) = \frac{x^k}{1 - x^3}$; montrer que F est un espace vectoriel de base (h_0, h_1, h_2) et que tout $f \in F$ est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ sous la forme $\sum a_n x^n$ avec $a_{n+3} = a_n$.

(d) Montrer que $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{1}{4}f''(0)g''(0)$ est un produit scalaire sur F , pour le quel (h_0, h_1, h_2) est orthogonale.

(e) Montrer que $g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{3}(1 - x)} \in F$.

Manque deux questions.

234. (Mines Télécom 2015)

Rayon de convergence et calcul $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

235. (Mines Télécom 2015)

Montrer que si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $\rho > 0$, alors $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence infini.

236. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence R .

Trouver celui de $\sum P(n) a_n x^n$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

237. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $f(x) = \frac{1}{(1-x)(3+x)}$ est développable en série entière.

Calculer le rayon de convergence puis expliciter le développement.

238. (Mines Télécom 2015)

(a) Développement en série entière de $\ln(1+t)$.

(b) Calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$

I.7. Intégration.

238. (Mines-Ponts 2023; avec préparation) (Martin)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$\exists M > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq M \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

238 bis. (CCINP 2022) (Marwa) Avec préparation.

Soit E l'ensemble des fonctions continues et positives sur $[0, 1]$.

Soit $\Phi : E \rightarrow E$ tel que $\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$

$$f_0 = 1, f_{n+1} = \Phi(f_n)$$

(a) Vérifier que $(x \mapsto 1) \in E$ et $(x \mapsto -1) \notin E$. En déduire que E n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(b) i. Montrer que $\Phi(f)$ est \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, et calculer $\Phi(f)'$.

ii. Φ est-elle injective? surjective?

(c) i. Montrer qu'il existe $(\alpha_n), (\beta_n)$ deux suites à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$, telles que $\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2}$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + 1$.

ii. Exprimer β_n en fonction de n .

239. (CCINP 2021) (Jules)

(a) Discuter de la nature de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^b}{a^t} dt$ selon les valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(b) Soit $a > 1, b \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $I(a, b)$ et $I(a, b - 1)$.

239 bis (CCINP 2024) (Alice)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + \alpha} dt$.

1. Prouver l'existence de $I(\alpha)$.

2. Déterminer la valeur de $I(\alpha)$.

240. (CCINP 2021) (Victor R)

On pose $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*, x \in [k, k + 1[$. Que vaut $[x]$? En déduire une expression de $\int_k^{k+1} f(x) dx$ en fonction de k .

(b) Montrer que $\int_1^{n+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx$.

En déduire que $\int_1^{n+1} f(x) dx = n + \ln(n!) - \ln(n + 1) \left(n + \frac{1}{2} \right)$.

(c) Montrer que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$.

(d) Etudier la convergence de la suite de terme général $I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx$.

(e) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

240 bis (Mines-Tel 2024) (Cecilia)

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une application définie sur \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

2. calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1 + \cos^2(x)} dx$.

241. (CCINP 2021)

(a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est intégrable sur $]1,2]$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{t-1}} dt$

i. Montrer que I_n est définie.

ii. Montrer que I_n est positive et décroissante.

Dans la suite, on admet que $I_n = \frac{\binom{2n}{n} \pi}{4^n}$

(c) Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$

i. Montrer que f est définie sur $] -\infty, 1[$.

ii. Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1[$.

(d) Montrer que $(1-u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} u^n$.

En déduire $\forall x \in] -1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{x^n}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}$

(e) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement.

242. (CCINP 2019)

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$

(a) Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Préciser f' .

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

242 bis. (CCINP 2024 -sans preparation) (Ludwig)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n}$.

1. Prouver l'existence de I_n .

2. Déterminer la limite de I_n .

243. (CCINP 2019)

Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$. Calculer I .

244. (CCINP 2019)

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

245. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2^{n+1}n!)^2}{(2n+3)!} \frac{n+1}{2}$.

246. (TPE 2019)

(a) Existence de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2t + 2}$ et en donner une primitive.

(b) On pose $t = \tan(x/2)$; retrouver les relations $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

(c) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.

247. (CCINP 2019)

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$

(a) Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

(c) Montrer que f ainsi prolongée est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

248. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 ((1-t)e^t)^n dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $P_n : \lambda \mapsto e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. On admet qu'elle vaut $\sqrt{\pi}/2$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(1-t) + t + \frac{t^2}{2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser son développement.

(c) En déduire l'inégalité $\ln(1-t) + t \leq -\frac{t^2}{2}$ pour tout t dans $[0, 1[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité $I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$ puis $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(e) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $1 - P_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-n} I_n$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Obtenir une majoration de $\mathbb{P}(X_n > n)$ puis trouver la limite de ce majorant quand n tend vers $+\infty$

249. (Mines Télécom 2019)

Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$.

250. (CCINP 2019)

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$. Montrer que $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$ et en déduire que $I_n = (2^{n+1} n!)^2 \frac{n+1}{(2n+3)!}$

251. (CCINP 2019)

On pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$. Quelle est la nature de I_1 ? Celle de I_n ? Calculer I_n .

252. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

et en déduire $\tilde{f}_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

(b) On note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$

Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(1+t^2)^{3/2}} dt$

(c) En déduire que, quand n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

(d) Pour f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on pose $\phi(f)(x) = \tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera le noyau. (e) Montrer que $\text{Im}(\phi) = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(0) = 0\}$.

(f) Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions f telles que $\phi(f) = \lambda f$ et en déduire les valeurs propres de ϕ .

(g) Montrer que, si f est développable en série entière, $\phi(f)$ l'est aussi.

253. (CCINP 2019)

Soit $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$$

(a) Discuter l'existence de I_n . Calculer I_0 et I_1 .

(b) i. Étudier les variations de $(I_n)_n$.

ii. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

(c) i. Montrer que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ et donner un équivalent de $(I_n)_n$.

ii. Préciser la nature de $\sum I_n$ et de $\sum (-1)^n I_n$.

(d) Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

(e) On pose pour $n \in \mathbb{N}, x \in]-1, 1[$ et $t \in [1, e]$ $f_n(t) = t \ln(t)^n x^n$.

i. Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[1, e]$.

ii. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'intégrale.

254. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 ((1-t)e^t)^n dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $P_n : \lambda \mapsto e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. On admet qu'elle vaut $\sqrt{\pi}/2$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(1-t) + t + \frac{t^2}{2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser son développement.

(c) En déduire l'inégalité $\ln(1-t) + t \leq -\frac{t^2}{2}$ pour tout t dans $[0, 1[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité $I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$ puis $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(e) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $1 - P_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-n} I_n$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Obtenir une majoration de $\mathbb{P}(X_n < n)$ puis trouver la limite de ce majorant quand n tend vers $+\infty$

255. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n}$. Existence de I_n ? Limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

256. (CCINP 2019)

Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n} dt$

257. (CCP 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$.

(a) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge.

(b) Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.

(c) i. Montrer que $v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du$.

ii. Montrer que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{2\pi}$.

(d) On définit la fonction f sur $]0, 1/2[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, 1/2]$.

(e) Donner un équivalent de u_n .

258. (CCP 2018)

Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on pose $I(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(a) $I(1)$ est-elle convergente? Quelle est sa valeur?

(b) Pour $0 \leq k \leq 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente? $I(P)$ converge-t-elle?

(c) On admet que $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid I(P) = aP\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + bP(0) + cP\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(d) Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a, b et c .

(e) On donne $I(X^2) = \frac{\pi}{2}$. Donner les valeurs de a, b et c .

(f) Donner une relation entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^k)$ puis conclure.

259.

260. (CCP 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$.

(a) Montrer par IPP que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge.

(b) Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent. (c) i. Montrer que $v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos u}{u} du$.

ii. Montrer que $v_n \sim \frac{\ln n}{2\pi}$.

(d) On définit la fonction f par $f : x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(e) Donner un équivalent de u_n .

261. (CCP 2018)

On pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\sin t}{1+t} dt$

(a) Donner l'ensemble de définition de f .

(b) Montrer que f y est de classe \mathcal{C}^1 et préciser un équivalent en 0.

262. (TPE-EIVP 2018)

Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$

(a) En utilisant le changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I = J$.

(b) Calculer I ; on remarquera que $I = (I + J)/2$, et on utilisera le changement $x = t - 1/t$.

263. (ICNA 2017)

Convergence, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx$.

264. (CCP 2017)

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$. Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

265. (CCP 2017)

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{u - [u]}{u^2} du$ converge et vaut $1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

266. (Mines Télécom 2016)

Décomposer $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+2)}$ en éléments simples.

Calculer $\int_2^{+\infty} g(x) dx$.

267. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-t+t^2}$ existent.

(b) On admet que $J = \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$; montrer, à l'aide d'un changement de variable,

que $J = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et la calculer.

(c) A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^3}$ et en déduire que $2I = J$ (d) Soient (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^2}$; montrer que

$$0 \leq v_n \leq \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(e) Montrer que si (u_n) est monotone, (v_n) converge et que si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge aussi.

(f) Montrer que ϕ définie par $\phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ est bijective et donner un développement limité à l'ordre 2 de ϕ^{-1} au voisinage de 0.

(g) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

268. (TPE-EIVP 2015)

Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{x - \text{Arctan } x}{x(x^2 + 1) \text{Arctan } x} dx$

269. (CCP 2015)

(a) Exprimer $\sin^2 u$ et $\cos^2 u$ en fonction de $\cos(2u)$.

(b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$ et $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

(c) Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ à l'aide du changement de variable $x = \frac{1-t}{2}$.

(d) À l'aide d'une somme de Riemann, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$.

(e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k(n-k)}{n^2}\right)$. Cas général?

270. (CCP 2015)

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

271. (CCP2015)

Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$ puis montrer que $I = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$.

272. (CCP 2015)

(a) Montrer que, $\forall n < 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{x(1+x^2)} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx$ existe.

(b) Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

273. (CCP 2015) (a) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et en déduire que $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (c) Calculer I_0 et I_1 puis montrer que $\forall n > 1, I_{n+1} = nI_{n-1}$.
- (d) Soit $J(n, p) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-p\frac{x^2}{2}} dx$; montrer que $I_n = p^{\frac{n+1}{2}} J(n, p)$.
- (e) Montrer que $J(n+1, p) = \frac{n}{p} J(n-1, p)$.
- (f) On admet que $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n$.
- (g) Montrer que $0 \leq \sqrt{n} I_n \leq I_{n+1}$ (on pourra étudier $\phi(x) = x + \frac{1}{x} - 2$).
- (h) Sachant que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$, montrer que :

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n}} \leq \binom{2n}{n} 4^{-n} \sqrt{n\pi} \leq 1.$$

En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

274. (CCP 2015)

Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+t^2}\right)^n dt$ existe et étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} I_n$.

275. (CCP 2015)

- (a) On rappelle que $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^p t^k + \frac{t^{p+1}}{1-t}$.
- (b) Montrer que $\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^p \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1-t} dt$.
- (c) On note $F_p(x) = \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1-t} dt$; montrer que $\forall x \in]0, 1[, 0 \leq F_p(x) \leq -x^{p+1} \ln(1-x)$
- (d) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ et $\int_0^1 \frac{F_p(x)}{x} dx$ convergent.
- (e) Manque une question, peut-être calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.
- (f) Justifier l'existence de $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \sum_{k=0}^n x^k dx$.
- (g) Montrer que :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^{n+1})}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \left(\frac{1}{n+1} - 1\right) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

- (h) On rappelle que $\sum \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$; en déduire la valeur de I_n (donnée par l'énoncé).

276. (CCP 2015)

Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } x}{x^2} dx$.

277. (CCINP 2022) Avec préparation.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^k d\theta$, et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}}.$$

- (a) Rappeler la formule de Stirling.
 (b) Justifier l'existence de I_k et de $f(x)$.
 (c) i. Montrer que $I_{k+2} = \frac{(k+1)}{(k+2)} I_k$. Indication : effectuer une intégration par parties
 ii. Calculer I_{2k} .
 (d) i. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
 ii. Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{\dots}$
 (e) (?) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$

I.8. Intégrales à paramètre.

278 bis. (Mines Tel 2023) (Gleb)

Soit :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

- a) Prouver que f est définie sur \mathbb{R} .
 b) Montre que f est de classe C^1 ; en dérivant f , déterminer f .

279. (CCINP 2024) (Adeline)

$$\text{Soit } f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt.$$

1. Justifier que f est définie sur $]1/2; +\infty[$.
 2. a. A l'aide d'une IPP prouver que $f(n) = 2n(f(n) - f(n+1))$.
 b. En déduire que $\forall n \geq 1, f(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}$.
 3. a. Soit $x \leq y$; comparer $f(x)$ et $f(y)$.
 b. Prouver que f est continue.
 4. Donner la nature de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.
 5. Trouver un équivalent de f lorsque $x \rightarrow +\infty$ et retrouver le résultat précédent.

279 bis (CCINP 2021) (Anna)

Soit $b_n : t \mapsto t^n e^{-\pi t^2}$, E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto P(x) e^{-\pi x^2}$, où P est une fonction polynomiale.

- (a) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 2\pi xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
 (b) i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n est intégrable sur \mathbb{R} .
 ii. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$. (Indication $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) e^{2i\pi xt} dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 .
- (d) Montrer que $B_0(x) = e^{-\pi x^2}$.
- (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n appartient à E .

280. (CCINP 2024 - avec préparation) (Cecilia ; Elias)

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\Gamma(1)$ existe et déterminer sa valeur.
2. a. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(2)$.
b. Montrer que Γ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
c. Montrer que Γ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
d. On admet que Γ est \mathcal{C}^∞ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$.

Montrer que Γ' est strictement croissante et qu'il existe un unique point c où $\Gamma'(c) = 0$ avec $c \in]1, 2[$.

3. On pose $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx - 1$.
a. Montrer que (u_n) est définie et que $u_n = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) - 1$.
b. Montrer que (u_n) converge vers 0 et que $\sum u_n$ diverge.

280 bis (CCINP 2021) (Grégory)

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, x > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt$ converge.

Cette intégrale sera notée $f_n(x)$ dans la suite de l'exercice.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*, x > 0$. A l'aide de changements de variable, montrer que $g_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt$ converge et que l'on a $f_n(x) = x^{n-1} e^x g_n(x)$.

- (c) Soit $n \geq 2$. Montrer que f_n est définie et continue sur \mathbb{R}_+ . En déduire un équivalent de g_n en 0^+ .

- (d) Montrer que $g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^n}$

281. (CCINP 2021) (Saranja)

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ converge, pour $x > 0$.
- (b) i. Montrer que F est strictement positive et décroissante.
ii. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- (c) i. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
ii. Calculer $F'(x) - F(x)$.
iii. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

- (d) Montrer que $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Indication : On pourra utiliser un ou plusieurs changement(s) de variable.

282. (Mines Télécom 2019)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- Domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
- Calculer f .

283. (CCINP 2019)

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{t}e^{-1/t}$.

- Montrer que $\lim_{0^+} \varphi = 0$.
- En déduire que pour tout x de \mathbb{R}_+^* , l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$ existe. On la note $h(x)$.
- Montrer que les solutions de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{1/x}(h(x) + k)$, avec k une constante réelle. (d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{1/x}h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$. On pourra effectuer le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur \mathbb{R}_+ et que c'est la seule.
- Trouver la limite de g en $+\infty$.

284. (CCINP 2019)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^x}{u} du$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.
- Quel est l'ensemble de définition de F ? Montrer que F est croissante sur celui-ci.
- Calculer $F(x+1) - F(x)$ et en déduire $F(n)$ en fonction de H_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.
- En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+x)$.

285. (CCINP 2019)

Montrer que $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{iyt} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

286. (Mines Télécom 2019)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour x dans \mathbb{R} :

$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-pt} dt$ et $J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-pt} dt$.

- Montrer que I_p et J_p sont définies sur \mathbb{R} .
- Montrer que I_p est dérivable sur \mathbb{R} .
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p(x)$.
- Exprimer $J_p(x)$ en fonction de x pour tout x de \mathbb{R} .
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a , la série $\sum_{p \geq 1} J_p(a^p)$ converge-t-elle?

287. (Mines Télécom 2019)

Soit g une fonction bornée impaire et continue.

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)e^{-x^2t} dt$$

- (a) Étude de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ en fonction du réel α .
- (b) i. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .
 ii. Quelle est la parité de F ?
- (c) i. Énoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
 ii. F est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- (d) i. On pose $g = \sin$.
 ii. Calculer F
 iii. Montrer que F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

288. (CCINP 2019)

$$\text{Soit } f(x) = \int_0^1 t^x e^{2t} dt$$

- (a) Donner le domaine de définition de f . (b) Soit $x > -1$, montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{e^2}{x+1}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
- (c) Par une minoration de f , montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.
- (d) Montrer que f est de classe C^1 et donner f' .
- (e) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- (f) De l'équivalent déduire α et β tels que $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

289. (CCINP 2019)

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t} dt.$$

- (a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ converge.
- (b) i. Montrer que F est positive et décroissante.
 ii. Donner la limite en $+\infty$ de $F(x)$.
- (c) Montrer que F est C^1 sur \mathbb{R}^{+*} .
 Calculer $F(x) - F'(x)$ et en donner une représentation simple en fonction de x .
- (d) Montrer que $F(x)$ peut se mettre sous la forme $\exp(x) \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt$.
- (e) i. Donner la limite de $F(x)$ en 0 .
 ii. Préciser un équivalent en 0 .

290. (CCINP 2019)

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser partie réelle et imaginaire de $\frac{1}{x+i}$.
- (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$.
- (c) On définit pour x réel, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. Montrer qu'on définit ainsi une fonction f sur \mathbb{R} . Montrer que f est continue. Étudier le caractère C^1 et exprimer f' .

(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}f(x)$.

(e) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on note $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}} dt$. Montrer l'existence de I_α . Exprimer I_α en fonction de f . En déduire le signe de I_α .

291. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $\text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

Posons $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctan}(x \tan t) dt$.

(b) Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et impaire.

(c) Montrer que F est continue sur \mathbb{R} .

(d) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et donner une expression de $F'(x)$ sans \int grâce au changement de variable $u = x \tan t$.

(e) Montrer que $|F(x)| \leq \frac{\pi^2}{4}$ pour tout réel x .

(f) Montrer que $F(x) \rightarrow \frac{\pi^2}{4}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

292. (CCP 2018)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$. (a) Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$.

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}$ avec K indépendant de x à préciser.

(c) i. Pour tout réel x , montrer l'existence de $f(x)$.

ii. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , exprimer $f'(x)$ sous forme d'une intégrale, en déduire l'expression de f .

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer l'existence de $L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-xu} du$.

(e) En supposant que L est continue en 0, calculer $L(0)$.

293. (EIVP 2017)

(a) Montrer que $f(x) = \int_0^x \cos(x \sin \theta) d\theta$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

294. (EIVP 2017)

(a) Montrer que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} \text{Arctan} \frac{1}{t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+ .

(b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 et calculer g' sous forme d'intégrale.

(c) Que dire de g sur \mathbb{R}_-^* ?

295. (CCP 2017)

Soit $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} dt$

(a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et exprimer f sous forme d'une intégrale.

(c) i. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ où $g(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2}$.

ii. Montrer que f est solution de $y'' - y = 0$.

(d) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{ixu} du$

(e) Déterminer f .

296. (CCP 2017)

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ quand c'est possible.

Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$ puis trouver sa limite en $+\infty$.

297. (CCP 2017)

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$ pour tout x réel convenable.

(a) Montrer que G est définie sur \mathbb{R} . On admet que F l'est aussi.

(b) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $G(x) = xG(1)$.

(c) Pour tout x réel, montrer l'encadrement $0 \leq G(x) - F(x) \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire que $F(x)$ est équivalent à $xG(1)$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que sa dérivée seconde est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2} dt$

(e) Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4xG(1)$ sur $]0, +\infty[$

(f) En déduire une expression de F sur $]0, +\infty[$ puis sur \mathbb{R} .

298. (CCP 2017)

On définit, lorsque celle-ci existe, la fonction $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-y^2}} dy$.

(a) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, calculer $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$

(b) i. En déduire que $f(0)$ existe et donner sa valeur.

ii. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

(c) i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt$.

ii. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

(d) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

(e) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

299. (CCP 2017)

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{t} e^{-1/t}$.

(a) Montrer que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

(b) En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$ existe. On la note $h(x)$.

(c) Montrer que les solutions de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{1/x}(h(x) + k)$, où k est une constante réelle.

(d) Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $e^{1/x}h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$.

On pourra considérer le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$.

(e) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(f) Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $[0, +\infty[$ et que c'est la seule.

(g) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$.

(h) Trouver la limite de g en $+\infty$.

300. (CCP 2016)

Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est définie et continue sur \mathbb{R} , puis trouver sa limite en $+\infty$.

301. (CCP 2016)

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ (a) Montrer que Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $\Gamma(1)$.

(b) i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. Soit $t > 0$, soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\forall x \in [a, b], t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$

(c) i. Montrer que $\Gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, expliciter $\Gamma''(x)$ et déterminer les variations de Γ' .

ii. Question non traitée mais je me souviens qu'il fallait en déduire les variations de Γ .

(d) Étudier les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$.

(e) Démontrer l'existence d'une suite (a_n) que l'on explicitera telle que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt.$$

302. (EIVP 2016)

Montrer que $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - 1}{t} dt$ est \mathcal{C}^1 , calculer $I'(x)$ puis $I(x)$.

303. (Mines Télécom 2016)

Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t} dt$ est \mathcal{C}^1 et calculer F' . En déduire F .

304. (Mines Télécom 2015)

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{\sin(t)}{t} dt$.

(a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Calculer f' .

(b) En déduire une expression de $f(x)$.

305. (CCP 2015)

(a) Ensemble de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

(b) Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+ et calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

306. (CCP 2015)

On admet la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

(a) Montrer que, pour $A \geq 0$, $\int_0^A \frac{\sin t}{x+t} dt = \frac{1}{x} - \frac{\cos A}{x+A} - \int_0^A \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$.

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$ converge pour $x > 0$.

(c) En déduire que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$ pour $x > 0$.

(d) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et donner une expression simple de $g'' + g$.

307. (CCP 2015)

(a) Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt$ ne converge que pour $x > 0$.

(b) Montrer que F est décroissante et positive.

(c) Montrer que $\forall x > 0, F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ et en déduire sa limite en 0. (d) Montrer que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$.

(e) En déduire que F est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

(f) Montrer que $F(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ et en déduire que $F(x) \sim -\ln x$ en 0^+ .

308. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que f est solution de l'équation $xy'' + y' + xy = 0$.

309. (CCP 2015)

(a) Montrer que $f(t) = \ln t \ln(1 - t^x)$ est définie et continue sur $]0, 1[$.

(b) Montrer l'existence de $I(x) = \int_0^1 f(t) dt$ puis que $I(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(kx+1)^2}$.

(c) Montrer que I est \mathcal{C}^1 et étudier sa monotonie.

(d) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel qu'au voisinage de $+\infty, I(x) \sim \frac{A}{x^2}$.

(e) Déterminer la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

310. (CCP 2015)

(a) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos x)e^{-xt}}{t^2} dt$ existe.

(b) On pose $\phi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$, pour $x \geq 0$; montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ (on admettra que $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2}$)

(c) Montrer que ϕ est continue, puis qu'elle est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(d) On admet que $\phi'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$; trouver ϕ et calculer $\phi(0)$.

(e) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin t \, dt$ existe et la calculer.

311. (CCP 2015)

(a) Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} \, dt$ n'existe que si $x > 0$.

(b) Montrer que F est positive et décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Montrer que $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

(d) Montrer que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$.

312. (CCP 2015)

(a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $\operatorname{Re} \frac{1}{i+x}$ et $\operatorname{Im} \frac{1}{i+x}$ et en déduire les solutions de $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$.

(b) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}} \, dt$ est définie sur un ensemble D à déterminer et qu'elle y est \mathcal{C}^1 . Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}f(x)$.

(c) $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \, dt$ est-elle définie pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$? Exprimer I_α à l'aide de f .

313. (CCP 2015)

(a) Ensemble de définition de $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \, dt$

(b) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide du changement de variable $t = u^2$ et en déduire $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

314. (CCP 2015)

(a) Montrer que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{x}{t}}{1+t^2} \, dt$, existe et est continue sur \mathbb{R}_+ , puis qu'elle est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Montrer que $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

manque fin

315. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $f(x) = \int_0^1 \left(t^{x-1} - \frac{1}{\ln t} \right) dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^*

Montrer que f y est \mathcal{C}^1 et écrire f' sans intégrale. En déduire f .

316. (CCINP 2022) Avec préparation

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(a) Trouver $a(x)$ et $b(x)$ tels que

$$\frac{a(x)}{1+t^2} + \frac{b(x)}{1+x^2t^2} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

(b) Montrer que f est bien définie.

(c) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 puis calculer f' .

(d) Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}(t)}{t} \right)^2 dt$

II. Algèbre

II.9. Logique, ensembles, applications, dénombrement, arithmétique.

317. (CCINP 2021) (Tamina)

Soit $k < n, k, n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $(k+1)(k+2) \binom{n+2}{k+2} = (n+1)(n+2) \binom{n}{k}$.

(b) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$.

318. (CCINP 2019)

f désigne une application d'un ensemble E dans lui-même.

(a) Montrer que si f est surjective, alors $f \circ f$ est surjective. Réciproque ?

(b) On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

319. (CCP 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

320. (CCP 2016)

Soit $P = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Montrer que $\forall z \in P, f(z) \in D$ et que f réalise une bijection de P sur D .

321. (CCP 2016)

On donne un ensemble E de cardinal n et, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note Ω_i l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $\text{card } B = i$ et $A \cup B = E$.

Trouver $\text{card } \Omega_i$ (on pourra au préalable étudier le cas $n = 5, i = 3$).

322. (EIVP 2016)

Par des raisonnements d'analyse combinatoire, montrer que :

(a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

(b) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$;

(c) $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

II.10. Nombres complexes et trigonométrie.

314. (CCINP 2021) (Enzo)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta$.

(a) Exprimer $|1 - z|$ en fonction de θ .

(b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|1 + z^2| \geq 1$?

315. (CCINP 2021) (Saranja)

(a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(b) Résoudre l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n = 1$.

316. (CCINP 2019)

(a) Résoudre $\sin((2n+1)\theta) = 0, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Montrer que : $(\cos \theta + i \sin \theta)^{2n+1} = \cos((2n+1)\theta) + i \sin((2n+1)\theta)$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^k \cos^{2n+1-2k} \theta \sin^{2k} \theta + i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cos^{2n-2k} \theta \sin^{2k+1} \theta$ (après avoir développé, on pourra séparer les termes pairs et impairs).

(c) Montrer que $\exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, P_n \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1} \theta}$ et expliciter P_n .

(d) Trouver les racines de P_n , leur produit et leur somme.

317. (CCINP 2019)

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. On pose $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall z \in \mathbf{C}^*, f(z^n) = P_n(f(z))$.

On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1} .

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant : $\forall z \in \mathbf{C}^*, f(z^n) = Q(f(z))$ est P_n .

(d) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$.

Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n .

(e) i. Montrer que $(P_n(0))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

ii. En déduire le coefficient constant de P_n .

(f) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$.

(g) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$.

!

318. (CCP 2018)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.

(a) Exprimer $|1+z|$ en fonction de θ .

(b) Montrer que $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

319. (CCP 2015)

Soit $w = \exp(2i\pi/7)$

Soient $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$

Calculer $S+T, S \times T$, puis en déduire S et T .

320. (CCP 2015)

Soit $\alpha = e^{i\pi/10}$; α^3, α^7 et α^9 sont-elles racines de $1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8$?

321. (CCP 2015)

Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et calculer $\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

322. (CCP 2015)

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $1 + z^k + z^{2k}$.

II.11. Espaces vectoriels normés.

323. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, à coefficients strictement positifs et telle que :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On admet que $\text{rg}(A - I_n) = n - 1$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

on pose $\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

(a) Déterminer $\text{Ker}(A - I_n)$.

(b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1} \|AX\| \leq \|X\|$.

(c) Soit λ une valeur propre de A . Montrer que : $|\lambda| \leq 1$.

(d) On pose $B = A + I_n = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,i} > \sum_{j \neq i} b_{i,j}$.

(e) Montrer que B est inversible.

(f) Montrer que $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R et que R est semblable à $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$.

(g) Montrer que $R = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(h) BONUS : En prenant la matrice extraite $= [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n-1}$ de A et en s'inspirant du raisonnement de la question 323e, montrer que l'on a bien $\text{rg}(A - I_n) = n - 1$

324. (CCINP 2019, CCP 2017)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

On note $\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$, et on admet

que $\|\cdot\|$ est une norme.

(a) Déterminer $\|A\|$ et $\rho(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

(b) Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ pour $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) i. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Montrer que $|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j|$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

ii. En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.

(d) Montrer que $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ pour tout $k \geq 1$.

(e) Montrer que, si A est diagonalisable, la suite (A^k) converge vers la matrice nulle dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\rho(A) < 1$

325. (CCP 2018)

On étudie $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in E$.

(b) Montrer que E est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

326. (CCP 2016)

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E , on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

- (a) Montrer que N est une norme sur E .
 (b) Prouver la majoration $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

327. (Mines Télécom 2015)

A (x, y) on associe $\sup\{|x + ty|, t \in [0, 1]\}$

Montrer que cette application définit une norme sur \mathbb{R}^2 et préciser la boule centrée en $(0, 0)$ de rayon 1.

328. (CCP 2015)

(a) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme quelconque et on note A_n l'ensemble des matrices M telles que $M^2 - (a + b)M + abI_n = 0$ où a et b sont deux réels fixés distincts. On dit que M est isolée dans A_n s'il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap A_n = \{M\}$.

(b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in A_2$.

(c) Montrer que si $M \in A_n$, ses seules valeurs propres possibles sont a et b .

(d) En déduire que $\exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{tr}(M) = ka + (n - k)b$.

(e) Montrer que tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(f) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall M \in B(aI_n, r), |\text{tr}(M) - na| \leq \varepsilon$.

(g) Montrer que aI_n est isolée dans A_n .

(h) Montrer que, pour $p > 1, O_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 1/p \\ -1/p & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et que la

suite de terme général $O_p^{-1} A O_p$ converge vers A .

(i) En déduire que A n'est pas isolée dans A_2 .

329. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, en donner l'adhérence et l'intérieur.

330. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $\Phi(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$ est une norme sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on pourra introduire $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$)

II.12. Polynômes.

331. (CCINP 2024 - sans preparation) (Keira)

1. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

2. Déterminer la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

331 bis. (CCINP 2024 - sans preparation) (Lea)

1. Factoriser $P = \sum_{k=0}^{n+1} x^k$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Calculer $\prod_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

332. (CCINP 2022) (Rujdy)

Soit $n \geq 0$ (ou 1), $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1$, $Q = (n+1)X^n + X^{n-1} + 1$.

Montrer que P et Q ont les mêmes racines dans \mathbb{C} . En déduire que P n'admet que des racines simples.

332 bis. (Centrale 2023) (Martin)

On pose pour tout $n \geq 2$, $P_n = -1 + X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ avec $\forall k \geq 2, a_k \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$. Montrer que (x_n) converge vers $\ell \in [0, 1[$.

2. On pose $P_n = -1 + X + X^2 + \dots + X^n$; trouver ℓ puis un équivalent de $(x_n - \ell)_{n \geq 2}$.

3. ??

333. (CCINP 2022) (Johan)

Soit $P(X) = X^4 + 4$.

(a) Montrer que P n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

(b) Factoriser P .

334. (CCINP 2021)

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polynôme définie par : $P_0(X) = 1$ et pour $k \geq 1, P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-k)^{k-1}$

(a) Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) i. Montrer que $P'_k(X) = P_{k-1}(X-1)$ pour $k \geq 1$.

ii. Montrer que $P_k^{(n)}(X) = P_{k-n}(X-n)$ pour $0 \leq n \leq k$.

(c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n l'application définie pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$u_n(Q)(X) = Q(X) - Q'(X+1)$$

i. Montrer que u_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser la matrice de u_n dans \mathcal{B} . ii. Montrer que u_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Déterminer u_n^{-1} .

335. (CCINP 2019)

On note J_n la matrice de coefficients $a_{ij} = \frac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$ et 0 sinon.

On donne $P_0 = 1, P_1 = X$ et $\forall n \geq 2, P_n = \det(XI_n - J_n)$.

(a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi], \sin((n+1)x) + \sin((n-1)x) = 2 \cos x \sin(nx)$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 2, P_n(X) = XP_{n-1}(X) - \frac{1}{4}P_{n-2}(X)$.

(c) On pose $Q_n = 2^n P_n$; montrer que $Q_n(\cos x) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$. pour $x \in]0, \pi[$.

(d) Montrer que P_n est scindé et que les sous-espaces propres de J_n sont des droites vectorielles.

(e) Calculer $\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ et $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

(f) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

336. (CCINP 2019)

Montrer que f qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 - X$ est un endomorphisme et donner son noyau.

337. (CCINP 2019)

Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P et déterminer sa multiplicité.

338. (CCINP 2019)

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(X - 1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$.

339. (Mines Télécom 2018)

Trouver le reste de division euclidienne de $\prod_{k=0}^n (X \sin k + \cos k)$ par $X^2 + 1$.

340. (CCP 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X - 1)^{2n+1} - 1$.

(a) Déterminer les racines du polynôme P .

(b) En déduire une simplification du produit $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

341. (CCP 2018)

Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X + 1)^n - e^{2in\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

342. (CCP 2017)

Montrer que $(X - 1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$;

343. (CCP 2017)

Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Montrer que 1 est racine de Q .

(b) On pose $R(X) = (X - 1)Q(X)$. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q + 1)X^q + 1$.

(c) Montrer que z , racine complexe de Q , vérifie $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et en déduire que $|z| \leq 1$

(on pourra raisonner par l'absurde et comparer $|z|^k$ et $|z|^q$ pour $k \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$). (d) On suppose que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.

i. Justifier sans calcul que R' est factorisable en produit de polynômes de degré 1, puis effectuer cette factorisation. Montrer que 1 est racine double de R . Montrer que les autres racines de R sont simples.

ii. Soit A une matrice complexe, diagonalisable, d'ordre n et dont le spectre est inclus dans l'ensemble des racines complexes de Q . Montrer que A^k converge vers une matrice de projection.

(e) Montrer que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.

344. (Mines Télécom 2016)

Écrire, sans démonstration et à l'aide de la formule de Taylor, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$

En déduire que a est racine multiple d'ordre r de P si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

345. (Télécom SudParis 2015)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_a^b P(x)Q(x)dx = 0.$$

Montrer que toutes les racines complexes de P sont dans $]a, b[$, qu'il y en a n , qu'elles sont simples, et que P est de degré exactement n .

On pourra considérer les k racines de P d'ordre impair dans $]a, b[$, notées y_1, y_2, \dots, y_k .

346. (CCP2015)

On note x, y, z les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$.

Exprimer $x + y + z$ et $xy + xz + yz$ en fonction de a, b et c .

347. (CCP 2015)

Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

Trouver les racines complexes de P_n .

348. (CCP 2015)

Trouver $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $P(j) = j^2, P(j^2) = j, P'(j) = j, P'(j^2) = j^2$ (on pourra s'intéresser à $R(X) = P'(X) - X$).

II.13. Algèbre linéaire.

347 bis. (Mines Tel 2023) (Charles)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.

b) Que dire de la trace de deux matrices semblables? Le démontrer.

c) Soit p un projecteur de \mathbb{R}^n de rang r avec $1 \leq r \leq n - 1$. Déterminer $tr(p)$.

347 ter. (Centrale 2023) (Paola)

Soient deux application linéaires $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$; on pose $w = v \circ u$.

Montrer que w est un isomorphisme ssi v est surjective et u est injective et $\ker v \oplus \text{Im}u = F$.

(+ autres questions??)

347 quater. (CCINP 2023) (Paola)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Un endomorphisme u de E est dit antisymétrique si pour tout $x, y, \langle u(x) | y \rangle = -\langle x | u(y) \rangle$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ matrice associée à l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dans la base canonique.

a) Montre que A est une matrice antisymétrique et donner l'expression de $f(a, b, c)$.

b) Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique (pour le produit scalaire usuel).

c) (i) Donner une base de $\ker f$ et $\text{Im}f$.

c) (ii) Montrer qu'il sont supplémentaires orthogonaux dans \mathbb{R}^3 .

d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

d) (i) Montre que u est un endomorphisme de E antisymétrique ssi la matrice de u est antisymétrique dans toutes les bases orthonormales.

d) (ii) A l'aide du déterminant montrer que si u est un endomorphisme bijectif antisymétrique alors son rang est pair.

e) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique.

e) (i) Montrer que $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe orthogonale dans E .

e) (ii) Montrer que le rang de v est pair.

347 quinquies. (CCINP2023 sans préparation) (James) Soit $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ la matrice canoniquement associée à f avec que des 0 sauf lignes et colonnes n où il n'y a que des 1. Donner M^2 (utiliser $f \circ f$). Justifier sans le théorème spectral la diagonalisabilité de f .

347 sexies. (CCINP2023) (James) Soit E l'e.v. des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; soit f un élément de E et $g = \phi(f)$ avec $g(x) = f'(x) - xf(x)$ pour tout x .

a) Justifier que ϕ est un endomorphisme.

b) (i) Résoudre $y' - xy = 0$ dans E . ϕ est-elle injective ?

b) (ii) ϕ est-elle surjective ?

c) On pose $g(x) = (1+x^2)\exp(x^2)$ et $f(x) = h(x)\exp(x)$; montrer qu'il existe f satisfaisant l'équation différentielle $f' - xf = g$ et tel que $f(0) = 0$.

d) Utiliser $\int_0^x (1+t^2)\exp(t^2/2)$ pour résoudre $f'(x) - xf(x) = g(x)$.

e) Montre que ϕ induit un endomorphisme ψ sur E .

+ autre question.

347 septies. (CCINP 2023) (Nathan).

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable, telle que $A^4 = I_n$.

Montrer que A est la matrice d'une symétrie.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ A & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

$B^2 = ?$; $B^4 = ?$

Montrer que B est diagonalisable ssi $A = I_n$.

347 opties. (Mines-Ponts 2023) (Paola)

Soit J une application définie sur \mathbb{R}^n tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $J(e_i) = e_{i+1}$ et $J(e_n) = 0$ (où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n). Trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par J .

347 nonies. (Mines-Ponts 2023) (Paola)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, et $x \in E$, $y \in F$. Existe-t-il toujours une application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que $u(x) = y$?

347 decies. (CCINP 2023 sans préparation) (Martin)

On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $B^3 = A$?

c) Même question mais tel que $B^2 = A$?

347 onzies. (Centrale 1) (Martin)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et f_α un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$f_\alpha : M \mapsto M^T + \alpha.M$$

a) f_0 est-il diagonalisable ? (+ Donner ses sep)

b) Pour quelles valeurs de α , f_α est-il diagonalisable ? (+ Donner $\dim S_n(\mathbb{K})$ et le démontrer).

c) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; quelles sont les conditions sur α pour que B admette un unique antécédent par f_α ?

347 douzies. (CCINP 2023 sans préparation) (Younoussa)

Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$. Indication : Effectuer la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$.

348. (CCINP 2024 - sans preparation) (Adeline)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $P \mapsto P(X+1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

348 bis (Mines Telecom 2022) (Aboubakar)

Soit $A = (?)$ telle que $\chi_A(x) = (x-9)^3$.

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) Trouver les sous-espaces propres de A .

(c) On pose $B = A - 9I_3$. Calculer B^2, B^3 . (On trouvait $B^2 \neq 0, B^3 = 0$.)

(d) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à B . Montrer que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(e) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire que l'on déterminera.

349. (Mines-Ponts 2022) (Jean)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(a) Montrer que $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists B \neq 0_n \mid AB = BA = 0$.

(b) Montrer que $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists B \neq 0_n \mid \forall k \in \mathbb{N}^*, (A+B)^k = A^k + B^k$.

349 bis (Mines-Tel 2024) (Cecilia)

Déterminer les éléments propres de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

350. (Centrale 2022) (Jean)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \min(i, j)$.

(a) Trouver T triangulaire supérieure telle que $A = {}^t T T$.

(b) Montrer que A est diagonalisable.

(c) Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

(d) On note $\alpha = \min(\text{Sp}(A))$ et $\beta = \max(\text{Sp}(A))$.

Montrer que (?) : $\alpha \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{n+1}{2} \leq \beta$

(e) Trouver A^{-1} .

350 bis (CCINP sans preparation) (Elias)

Pour $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer spectre, Im et ker.

351. (Centrale 2022) (Juliette)

Pour $x \in \mathbb{R}, n \geq 1$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x & 3 & \cdots & n \\ \vdots & 2 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x \end{pmatrix}$

- Calculer $\det(M(x))$.
- Montrer que $M(x)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
- ?

351 bis (CCINP sans preparation 2024) (Nollan)

Soient n réels a_1, a_2, \dots, a_n et $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & \vdots & \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Exprimer A^2 en fonction de A .
- Déterminer une CNS pour que A soit diagonalisable.

352. (Mines-Ponts 2024) (James) Soit \mathcal{D} l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

- \mathcal{D} est-il un sous-espace vectoriel ?
- Soit \mathcal{V} un sev inclus dans \mathcal{D} . Montrer que $\dim(\mathcal{V}) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

352 bis. (CCINP 2022) (Mohamed)

Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + I_n = 0$. Montrer que $n \equiv 0[2]$. Les matrices M sont-elles diagonalisables ?

353. (Mines-Tel 2024) (Keira)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$.

- A l'aide du théorème d'Hamilton-Cayley, montrer que 0 est valeur propre de A .
- Montrer par récurrence que $A^n = O_n$.

353 bis. (CCINP 2022) (Marwa)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X], P \in E$.

$f(P) = (X^2 + 1)P' - (nX + 1)P$.

Montrer que f est un endomorphisme.

354. (CCINP 2022) (Valentin)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D .
- Déterminer B telle que $B^3 = A$.

354 bis. (CCINP 2024) (Kennedy)

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $T(P) = XP'$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer pour tout $p \geq 2$, $T^p(X^k)$.
3. T est-il bijectif? est-il diagonalisable?
4. On pose $Q_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} k^k (X-k)^{p-k}$.
 - a. Obtenez une relation entre Q_p et Q'_{p+1}
 - b. Soit α une racine d'ordre au moins $p \geq 2$ de P . Montrer que α est racine de $T^{p-1}(p)$.
???

355. (CCINP 2022) (Océane) Avec préparation.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes tels que

$$u^2 = ku \quad \text{et} \quad v^2 = kv$$

où k est un réel non nul.

- (a) Dans le cas où u est bijectif, déterminer u .
- (b) i. Montrer que $\text{Im } u = \text{Ker}(u - k \text{id}_E)$.
- ii. On suppose u non injectif. Soit λ une valeur propre de u .
Montrer que $\lambda(\lambda - k) = 0$.
Quelles sont les valeurs propres de u ? Quels sont les sous-espaces propres associés?
- (c) i. Soit $z \in E$. On pose $y = z - u\left(\frac{1}{k}z\right)$. Calculer $u(y)$.
- ii. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.
- (d) Montrer que $(u + v)^2 = k(u + v) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- (e) ?

355 bis (MinesTel 2024) (Raphaël V.)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n \geq 1$. Soit W un sous-espace vectoriel de E . On définit :

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid W \subset \ker u\}$$

1. Montrer que A est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer la dimension de A .

356. (CCINP 2024 - avec preparation) (Ludwig)

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$; soit $u(P) = (X^2 - 1)P' - (4X - 3)P$.

1. Résoudre sur $] -1, +\infty[$, $(x - 1)y' - 4y = 0$.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que λ est valeur propre de u ssi $\exists P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$, $(X^2 - 1)P' = (4X - 3 + \lambda)P$.
4. Montrer que -1 est valeur propre de u et déterminer un vecteur propre associé. (On pourra s'aider de 1) et 3)).
5. Ecrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = (X^2 - 1)Q$.

356 bis (Mines Tel 2024) (Malo)

Pour $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.

2. Déterminer $\text{Im } u$ et $\text{ker } u$.
3. u est-il diagonalisable ?

357. (Mines Télécom 2021) (Anna)

- (a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- (b) Quelle est la trace de deux matrices semblables ? Montrez-le.
- (c) p projecteur de rang r , avec $0 \leq r \leq n - 1$. Quelle est la trace de p ?

358. (Mines Télécom 2021) (Juliette) (CCINP 2019)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ (avec $p \geq 1, n \geq 1$). Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- (a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
- (b) Montrer que $\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre.
- (c) Montrer alors que $p \leq n$.

359. (CCINP 2021) (Claudia)

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Chercher une relation entre M^2 et M .

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i. Chercher une relation entre A et M .
- ii. Puis une relation entre A et A^2 sans M .
- (b) Montrer que A est inversible et trouver l'inverse.

360. (CCINP 2021) (Anna)

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que $A \times B$ n'est pas inversible.
- (b) Montrer que $B \times A$ peut être inversible.

361. (CCINP 2021) (Oden ?)

f et g sont deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose qu'il existe deux complexes a et b tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. On pose, pour $h \in \mathcal{L}(E)$, $\phi_g(h) = h \circ g - g \circ h$.

Dans les quatre premières questions, on suppose $b = 0$.

- (a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est stable par g .
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_g(f^n) = anf^n$.
- (c) Montrer qu'il existe $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$. (On raisonnera par l'absurde.)
- (d) Soit u l'endomorphisme induit par g sur $\text{Ker}(f)$. Montrer que u admet un vecteur propre et que f et g ont des vecteurs propres communs.
- (e) On considère maintenant $b \neq 0$. Montrer que f et g admettent des vecteurs propres communs (on posera $h = af + bg$).

362. (Mines Télécom 2021) (Célian)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit diagonalisable.
 (b) Trouver, le(s) cas échéant(s), une matrice de passage.

363. (CCINP 2021) (Amina)

Soit $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$. On pose $B = A^T A$.

- (a) Montrer que B est diagonalisable.
 (b) Montrer que 0 est valeur propre de B .

364. (CCINP 2021) (Jules)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.

On définit $A \otimes B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix}$

Pour les trois premières questions, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) B est-elle diagonalisable? Donner $A \otimes B$ et son rang.
 (b) Quel est le rang de A ? Donner les valeurs propres de A sans passer par le polynôme caractéristique.

(c) Donner les valeurs propres de $A \otimes B$.

Pour les questions suivantes, on considère $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Sp}(A)$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$, $\mu \in \text{Sp}(B)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in E_\mu(B)$. On pose $Z = \begin{pmatrix} x_1 Y \\ x_2 Y \end{pmatrix}$

- (d) Exprimer $(A \otimes B)Z$ en fonction de λ, μ et Z .
 (e) Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ l'est. Donner alors les valeurs propres de $A \otimes B$ en fonction des valeurs propres de A et B .

365. (CCINP 2021)

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $\det(A)$ et montrer que A n'a pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à J .

i. Donner les valeurs propres de f et les s.e.v. propres associés.

ii. Montrer que $M_a = P D_a P^{-1}$ où P matrice inversible et D_a matrice diagonale.

On précisera les coefficients de ces matrices.

(c) Soit H matrice réelle supposée (dans cette question seulement) racine carrée de M_a (i.e. $H^2 = M_a$) et h l'endomorphisme canoniquement associé.

i. Montrer que $HJ = JH$.

ii. Notons P_λ une colonne de P . Simplifier $HJP_\lambda = JHP_\lambda$.

En déduire que HP_λ est proportionnel à P_λ .

- iii. En déduire que H est de la forme $P \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma) P^{-1}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
 iv. En déduire une condition nécessaire sur a pour que H existe.
 (d) Pour a vérifiant cette condition nécessaire, donner une racine carrée de D_a .
 (e) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'existe une matrice racine carrée de M_a dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

366. (CCINP 2021) Soit A_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d_n = \det A_n$.

- (a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (d_n) .
 (b) En déduire une expression de d_n en fonction de n, a, b .

367. (Mines Télécom 2021)

- (a) Rappeler la formule donnant le produit d'une matrice carrée par un vecteur colonne.

(b) On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer sans calcul le rang, l'image, et le noyau de M .

- (c) Toujours sans calculs, diagonaliser la matrice M .

368. (Mines Télécom 2021)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- (a) Caractériser les endomorphismes f de E tels que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
 (b) Soit f un tel endomorphisme. Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible (on demande en particulier qu'elle contienne le plus de zéros possibles).

369. (ENSEA 2021)

Soient A et B des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible.

Montrer que le spectre de AB est égal au spectre de BA .

370. (CCINP 2019)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable et vérifiant $A^n = I_n$.

- (a) Montrer que A est une symétrie.
 (b) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable $\Leftrightarrow A = I_n$.

371. (CCINP 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ avec : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$.
 (b) En déduire que A possède n valeurs propres distinctes.

372. (CCINP 2019)

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \Delta$. Montrer que X et Δ commutent, puis que X est diagonale.

(b) Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

373. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et si P est dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P'$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il injectif?

(b) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

(c) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g(X^k) = X^{n-k}$. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $h = g \circ f \circ g^{-1}$ n'est pas diagonalisable.

(d) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) + h(P) = aXP + b(X^2 - 1)P'$.

(e) Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $u = f + g$.

Calculer le déterminant de A .

374. (CCINP 2019)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E .

(a) Montrer que si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors c'est aussi une valeur propre de $v \circ u$

Dans les questions 363b et 363c (seulement), on suppose que u et v sont bijectifs.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

i. Exprimer $\det(\alpha v - v \circ u \circ v)$ en fonction de $\det(v)$ et de $\chi_{u \circ v}(\alpha)$. Exprimer ce même nombre en fonction de $\det(v)$ et de $\chi_{v \circ u}(\alpha)$. En déduire que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

ii. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$ (et de $v \circ u$, d'après 2.a). On note E_λ l'espace propre de $u \circ v$ relativement à cette valeur propre et E'_λ l'espace propre de $v \circ u$ relativement à cette valeur propre. Montrer l'inclusion $v(E_\lambda) \subset E'_\lambda$. On admet l'inclusion $u(E'_\lambda) \subset E_\lambda$

(c) Montrer que E_λ et E'_λ ont la même dimension. En déduire que la diagonalisabilité de $u \circ v$ implique celle de $v \circ u$.

(d) On revient au cas général et on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\beta \text{Id}_E - u \circ v$ soit bijectif. On note alors w sa bijection réciproque.

Montrer l'égalité $(\beta \text{Id}_E - v \circ u) \circ (\text{Id}_E + v \circ w \circ u) = \beta \text{Id}_E$ et en déduire que $\beta \text{Id}_E - v \circ u$ est bijectif.

(e) Montrer finalement que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

375. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ qui est un déterminant de taille n .

- (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
 (b) Calculer D_n en fonction de n .

376. (CCINP 2019)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer le rang de A .
 (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
 (c) Déterminer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

377. (Mines 2019)

Une matrice stochastique est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que la somme des coefficients sur chacune de ses lignes est égale à 1 .

- (a) Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $A \times B$ en est une aussi.
 (b) Soit A une matrice stochastique. Vérifier que 1 est une valeur propre de A et que toute valeur propre complexe de A a un module inférieur ou égal à 1.
 (c) Trouver toutes les matrices stochastiques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que A^{-1} soit stochastique.

378. (CCINP 2019)

On pose $\Delta = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose l'endomorphisme $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto {}^tAMA \end{cases}$

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui de la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1 .

- (a) Montrer que Δ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 (b) On suppose que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_A(M) = M$.
 i. Montrer que A est orthogonale.
 ii. On suppose que $\Delta = \text{vect}(I_n)$. Montrer que $A = I_n$ ou $A = -I_n$.
 (c) Montrer que f_A est bijective si et seulement si A est inversible.
 (d) Exprimer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 (e) Vérifier que l'on a bien $\Delta = \text{vect}(I_n)$.

379. (CCINP 2019, CCP 2017)

On note u l'endomorphisme canoniquement associé sur \mathbb{C}^3 à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Quel est le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
 (b) Déterminer $\text{Ker}(u - 2Id)$ et $\text{Ker}((u - Id)^2)$
 et montrer que $\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(u - 2Id) \oplus \text{Ker}((u - Id)^2)$.
 (c) On note v un endomorphisme de \mathbb{C}^3 canoniquement associé à une matrice X telle que $X^n = A$, avec $n \in \mathbb{N}$.
 i. Montrer que u et v commutent.

ii. En déduire que $\text{Ker}(u - 2Id)$ et $\text{Ker}((u - Id)^2)$ sont stables par v . iii. Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, avec α dans \mathbb{C} et Y dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

iv. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $YJ = JY$ et en déduire que Y est dans $\text{Vect}(I_2, J)$.

v. Trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ solutions de $X^n = A$.

380. (TPE 2019) (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + 3f + 2Id = 0$ est un automorphisme. (b) Montrer par récurrence qu'il existe (a_n) et (b_n) telles que $f^n = a_n f + b_n Id$. (c) Montrer que (a_n) vérifie une relation linéaire d'ordre 2. (d) Calculer a_n et b_n .

381. (CCINP 2019)

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie, vérifie $u^3 = u$, alors $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

382. (CCINP 2019)

(a) Donner une base et la dimension de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = P(b) = 0\}$ où a et b sont deux réels distincts.

(b) Pourquoi une application ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} , vérifiant $\phi(1) = 1, \phi(X) = 0$ et $\forall P \in F, \phi(P) = 0$ existe-t-elle ?

383. (Mines Télécom 2019)

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = X(X - 1)P(-1) + (X + 1)(X - 1)P(0) + X(X + 1)P(1)$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soient $A = X(X - 1), B = (X + 1)(X - 1)$ et $C = X(X + 1)$. Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

(c) Déterminer $\text{Ker}(f)$. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre associé.

(d) Montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

(e) Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de f . Que peut-on dire du degré de P ? Préciser l'ensemble des valeurs propres et des sous-espaces propres de f .

384. (CCINP 2019)

On définit l'application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = (X + 2)P - XP(X + 1)$

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) i. Pour P dans $\text{Ker } \Phi$, calculer $P(0)$ et $P(-1)$.

ii. Montrer qu'il existe R dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$P(X) = X(X + 1)R(X)$ et $R(X + 1) = R(X)$.

iii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est constante.

iv. Déterminer $\text{Ker } \Phi$.

(c) Déterminer $\text{Im } \Phi$.

(d) Déterminer le spectre de Φ (on pourra utiliser la matrice de Φ dans la base canonique.). Φ est-il diagonalisable ?

385. (Mines Télécom 2019)

(a) Énoncer le théorème du rang.

(b) Montrer que, en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est surjectif.

(c) $\phi(P) = P'$ est-il injectif sur $\mathbb{R}[X]$? Surjectif?

386. (Mines Télécom 2019)

Montrer que f donné par $f(P)(X) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le noyau et l'image. Déterminer les valeurs propres de f .

387. (Mines Télécom 2019)

Montrer que $\forall (A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \det(A + X) = \det X \Leftrightarrow A = 0$.

388. (Mines Télécom 2019)

(a) $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Ecrire $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{2}w_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - w_n \end{cases}$ sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire X_n en fonction de A^n et X_0 .

(c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n , et de u_0, v_0, w_0 .

389. (Mines Télécom 2019)

Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

390. (Mines Télécom 2019)

$$\text{Calculer } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

391. (CCINP 2019)

Donner le rang et une base de l'image de la matrice qui a des 1 sur les première et dernière lignes, les première et dernière colonnes, et des 0 partout ailleurs. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

392. (CCINP 2019)

(a) Montrer que ϕ , qui à P associe $Q(X) = (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour $P \in \text{Ker } \phi$, calculer $P(0)$ et $P(-1)$.

(c) Montrer que $\exists R \in \mathbb{R}[X], P(X) = X(X+1)R(X)$ et $R(X) = R(X+1)$.

(d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est une constante.

(e) Trouver $\text{Ker } \phi$ et $\text{Im } \phi$ (on pourra utiliser la matrice de ϕ dans la base canonique).

(f) Déterminer le spectre de ϕ . Est-il diagonalisable ?

393. (CCINP 2019)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$. Montrer que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f), \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ puis que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

394. (CCINP 2019)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- (a) Montrer que A est diagonalisable. Combien de valeurs propres distinctes possède A ?
 (b) Déterminer $Sp(A)$ et χ_A .

395. (CCINP 2019)

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f dans E , on pose $u(f) : x \mapsto \int_x^{x+1} f$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et on définit sur \mathbb{R} la fonction $h_a : t \mapsto e^{at}$. Montrer que $u(h_a) = \lambda_a h_a$, avec $\lambda_a = \frac{e^a - 1}{a}$ si $a \neq 0$ et $\lambda_0 = 1$.

(b) i. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f$. Ecrire $u(f)$ en fonction de F . Montrer que $u(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer $(u(f))'$.

ii. u est-elle surjective ?

(c) i. Montrer que f est dans $\text{Ker}(u)$ si et seulement si f est 1-périodique et $\int_0^1 f = 0$.

ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $c_k : t \mapsto \cos(2\pi kt)$ est dans $\text{Ker}(u)$.

(d) Montrer que l'application $(.,.) : (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ définit un produit scalaire sur le sous-espace des fonctions 1-périodiques de E .

Montrer que : $\forall k, l \in \mathbb{N}^*, k \neq l \Rightarrow (c_k, c_l) = 0$.

La dimension de $\text{Ker}(u)$ est-elle finie ?

(e) Déterminer $\mathbb{R}_+ \cap Sp(u)$.

396. (Mines Télécom 2019)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f \circ f = f$.

(a) Montrer que $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$.

(b) Représentation géométrique de f .

(c) Montrer que f est diagonalisable.

(d) Qu'est ce qu'il en est des symétries vectorielles dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ?

397. (Mines Télécom 2019, Mines Télécom 2018)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et A sa matrice associée dans une base \mathcal{B} .

(a) Donner la définition de u est diagonalisable et donner la version matricielle de cette définition.

(b) Donner une caractérisation de u diagonalisable.

(c) On suppose $E = \mathbb{R}$, u diagonalisable et $u^4 = Id_E$. Montrer que u est une symétrie vectorielle.

(d) On donne $\text{tr}(u) = n - 2$. Préciser le résultat précédent.

398. (TPE-EIVP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $T(P) = P(X + 1) - P(X)$.

(a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

(b) Montrer que le spectre de T est $\{0\}$. Déterminer le sous-espace propre associé. T est-il diagonalisable ?

(c) Montrer que $T^{n+1} = 0$ (on pourra comparer les degrés de $T(P)$ et P pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$)

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) = 0$ (utiliser l'endomorphisme $D = T + Id_{\mathbb{R}_n[X]}$).

399. (Mines Télécom 2019)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sans le moindre calcul, déterminer le rang de A , son image et son noyau.

(b) A est-elle diagonalisable ?

(c) A est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

400. (CCINP 2019)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^n = 0$.

(a) Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.

(b) Montrer que si $M^t M = {}^t M M$, alors $M = 0$.

401. (CCINP 2019)

$$\text{On pose } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) + P(X) \end{cases} .$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme.

(b) Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\varphi^k(P)$.

402. (CCINP 2019)

On pose, pour $n \geq 2$, M_n la matrice $n \times n$ constituée uniquement de 1 .

Donner les valeurs propres et les s.e.v. propres.

403. (CCINP 2019)

On pose $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \rightarrow XP' + P$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme.

(b) En préciser les valeurs propres.

404. (Mines Télécom 2019)

Soit un entier $n \geq 2$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P'(X) - nXP(X)$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

(b) Pour quelles valeurs de n f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

405. (Mines Télécom 2019)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de E .

On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) / W \subset \text{Ker } u\}$

(a) Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) Exprimer la dimension de \mathcal{A} en fonction des dimensions de E, F, W .

406. (CCINP 2019)

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que A et B sont diagonalisables.

(b) Montrer que $A + B$ n'est pas diagonalisable.

(c) On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

(d) Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

(e) Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

(f) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

Déterminer l'intersection $F \cap T$. En déduire l'inégalité : $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

(g) Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

(h) Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

407. (Mines Télécom 2019)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues dans \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

Soit T définie pour tout $f \in E$ par $T(f) = F$ avec :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

(a) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

(b) Montrer que T est un endomorphisme de E .

(c) T est-elle injective ? T est-elle surjective ?

Utiliser la première question pour déterminer s'il y a surjectivité.

408. (Mines Télécom 2019)

Soit A une matrice réelle $n \times n$ telle que $A^3 + A^2 + A = O_n$.

(a) En supposant A inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n .

(b) En supposant A symétrique, montrer que A est la matrice nulle.

409. (CCINP 2019)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On définit f comme l'endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \sum_{i \neq k} e_i \quad \text{(a) Montrer que } f \text{ est diagonalisable.}$$

(b) Donner le rang de $f + \text{Id}_E$.

(c) En déduire les valeurs propres de f .

410. (Mines-Télécom 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note P la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$. Montrer que P est le produit de deux matrices dont la deuxième est diagonale par blocs. En déduire la valeur de $\det(P)$.

411. (CCINP 2019)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

On note $C_f = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$

(a) Montrer que C_f est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\det(e_1 - x, e_2 - x)$.
A quelle condition sur x la famille $(e_1 - x, e_2 - x)$ est-elle une base de \mathbb{R}^2 ?

(c) n est un entier $n \geq 2$. (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$. Condition pour que $(e_1 - x, \dots, e_n - x)$ soit une base de \mathbb{R}^n ?

(d) On note $x = (x_1, \dots, x_n)$. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que pour chaque i , $f(e_i) = e_i - x$.

i. Préciser les valeurs propres de f et leur ordre de multiplicité. (On fera intervenir $S =$

$$\sum_{i=1}^n x_i)$$

ii. f est-il diagonalisable ? Préciser la dimension de C_f quand f est diagonalisable.

412. (CCP 2018) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $A \cdot A^T \cdot A = I_n$.

(a) Montrer que la matrice A est inversible et que A^{-1} est symétrique.

(b) Montrer que la matrice A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

413. (CCP 2018)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2p + 1$. Soit f un endomorphisme de E .

(a) Soit λ une valeur propre éventuelle de f . Soit x un vecteur propre associé. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $f^n(x)$.

(b) Justifier que f possède au moins une valeur propre.

(c) On fait l'hypothèse $f^3 - f^2 + f - \text{id}_E = 0$. Déterminer les valeurs propres de f .

414. (CCP 2018)

On considère l'ensemble E des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) traduisant l'appartenance à E .

(b) En déduire que E est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

415. (CCP 2018)

$B = {}^tAA$ avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Admet-elle 0 pour valeur propre ?

416. (CCP 2018)

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB - BA = B$

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k = B^k(A + kI_n)$ et en déduire que $\det B = 0$.

417. (CCP 2018)

(a) Montrer que f , défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(X) = X - 2 \text{tr}(X)A$, où A est une matrice fixée non nulle, est un endomorphisme.

(b) On choisit $\text{tr} A = \frac{1}{2}$. Montrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker} f$.

(c) On choisit $\text{tr} A \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $\text{Ker} f = \{0\}$ et en déduire que f est injective si et seulement si $\text{tr} A \neq \frac{1}{2}$.

(d) Déterminer $\text{Ker } f$ quand $\text{tr } A = \frac{1}{2}$ puis montrer que f est le projecteur sur l'ensemble des matrices de trace nulle parallèlement à $\text{Vect}(A)$.

(e) On choisit $\text{tr}(A) = 1$. Montrer que f est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

(f) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.

418. (CCP 2018)

Soit une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$, $M = [C_1, C_2, C_3, C_4]$ (C_i est la colonne $n^{\circ}i$).

Montrer que $\det [C_1 + C_3, C_2 + C_4, C_1 - C_3, C_2 - C_4] = 4 \det M$.

419. (CCP 2018)

On définit $u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ pour $f \in E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(a) Montrer que pour $h_a : t \mapsto e^{at}$, on a $u(h_a) = K_a h_a$ avec $K_a = \frac{e^a - 1}{a}$ pour tout $a \neq 0$.

Si $a = 0$, que vaut K_a ?

(b) Montrer que u est un endomorphisme de E . Le noyau $\text{Ker}(u)$ est-il de dimension finie ?

On définit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ Exprimer $u(f)(x)$ en fonction de F .

(c) Montrer que u n'est pas surjectif.

(d) Montrer que $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $c_k : t \mapsto \cos(2k\pi t)$. Montrer que, si $k \neq l$, alors $(c_k | c_l) = 0$.

420. (Mines Télécom 2018)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

421. (Mines Télécom 2018)

Soit la matrice $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell \in \mathbb{R}$.

422. (CCP 2018)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$.

(b) Quelles déductions peut on faire sur les valeurs propres de A ?

423. (CCP 2018)

Soit A la matrice diagonale réelle $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Posons $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), M \rightarrow AM - MA$

Déterminer les valeurs propres de Φ et leur espace propre associé.

424. (CCP 2018)

Soit $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne $n + 1$ et de la colonne $n + 1$ qui valent tous 1 .

Montrer que M est diagonalisable, puis trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

425. (CCP 2018, CCP 2017)

V est l'ensemble des suites $(v_n)_n$ à valeurs complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$$

(a) Montrer que V est un espace vectoriel complexe.

(b) Soit $P = X^3 - X^2 - 1$.

i. Montrer que P admet une unique racine réelle b .

ii. Montrer que P peut s'écrire $P = (X - b)(X - z)(X - \bar{z})$ où z est un complexe non réel.

(c) Soit $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (v_0, v_1, v_2)$$

i. Montrer que Φ est un isomorphisme.

ii. En déduire que V est de dimension finie à préciser.

(d) Pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V$, on définit la colonne $W_n = (v_n v_{n+1} v_{n+2})^T$ pour tout n entier.

Donner une matrice A telle que $W_{n+1} = AW_n$ pour tout entier n .

(e) A est-elle diagonalisable ?

En déduire la forme générale des éléments de V .

426. (CCP 2018)

$f \in L(E)$ et $\dim(E) = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$.

(a) Si λ est valeur propre et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?

(b) Supposons que $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0_E$.

Justifier que f admet au moins une valeur propre réelle et la donner.

427. (TPE-EIVP 2018)

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Posons $M = I_n + A$. M est-elle inversible ?

428. (CCP 2018)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a la famille (A, A^2) est-elle liée ?

Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

429. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que la trace est une application linéaire.

(b) Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, donner le coefficient c_{ij} de $C = AB$. (c) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

(d) Montrer que $\phi(A, B) = \text{tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(e) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

430. (TPE-EIVP 2017)

Pour tout λ réel, on note (E_λ) l'équation différentielle $xy' - (1 + \lambda)y = 0$.

(a) Résoudre (E_λ) sur \mathbb{R}_+^* .

(b) On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

431. (CCP 2017)

Soit p un projecteur d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g = p + \alpha \text{id}_E$.

(a) Calculer g^2

(b) On suppose que g est bijectif. Trouver une expression de g^{-1} .

432. (CCP 2017)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E . On fait les hypothèses $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

(a) Calculer $\det(-\text{id}_E)$. En déduire que f^2 est différent de $-\text{id}_E$ puis que f n'est pas injectif.

(b) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

(c) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

(d) Montrer l'existence d'un vecteur x de E tel que $f^2(x) \neq 0_E$ puis montrer que, pour un tel vecteur x , la famille $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$.

(e) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ est de dimension 2.

(f) Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

433. (Mines-Télécom 2017)

$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Donner ses valeurs propres.

434. (CCP 2017)

Montrer que f défini par $f(M) = M + M^T$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable?

435. (CCP 2017)

Sur $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_P(M) = {}^tPMP + {}^tP^tMP$ et on note C l'ensemble des endomorphismes de E_n tels que ${}^t\varphi(M) = \varphi({}^tM)$.

(a) Soit M inversible, montrer que tM est inversible et exprimer son inverse en fonction de M^{-1} .

(b) Montrer que $\varphi_P \in C$ et donner $\text{Ker} \varphi_P$ en supposant P inversible.

(c) Soient S_n l'ensemble des matrices symétriques et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $E_n = S_n + A_n$.

(d) Montrer que tout endomorphisme $\varphi \in C$ si et seulement si $\varphi(S_n) \subset S_n$ et $\varphi(A_n) \subset A_n$.

(e) Soient $n = 2, P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{tr} \varphi_P = 2(\text{tr} P)^2$ (on pourra considérer les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique). Déterminer C .

436. (CCP 2017)

Soit f une forme linéaire sur E , espace vectoriel de dimension n , et $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

(a) Montrer que $E = \text{Ker} f + \text{Vect}(a)$.

(b) On suppose $f(a) = 1$. Montrer que $p(x) = f(x).a$ est un projecteur et donner les sous-espaces F et G tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G .

437. (CCP 2017)

On note $R_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes de taille n et vérifiant $\exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \exists \lambda \in \mathbb{C}, Q + \lambda M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

$$\text{On donne } J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n = J_n + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $\det A_2$ et $\det A_3$, puis $\det A_n$.
 (b) Montrer que si D diagonale a l'un de ses coefficients diagonaux nuls, alors $D \in R_n(\mathbb{C})$.
 (c) Montrer que A , diagonalisable et non inversible, est dans $R_n(\mathbb{C})$.
 (d) On donne $Q_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$; pour $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $\det(Q_0 + \lambda M_0)$ puis montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible est dans $R_n(\mathbb{C})$.
 (e) Comparer, au sens de l'inclusion, $R_n(\mathbb{C})$ et l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

438. (CCP 2017)

$$\text{Soit } M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } E = \{M(a, b, c) / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

- (a) On note $J = M(0, 1, 0)$. Calculer J^2 . Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I_3, J et J^2 .
 (b) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension? Est-il stable par produit?
 (c) La matrice J est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
 (d) La matrice M est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
 (e) Montrer que M est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si $b = c$.
 (f) On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a, b, c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur? Donner alors son image et son noyau.

439. (CCP 2017)

$$\text{Soit } A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer $\det A_n$ pour $n \geq 1$.
 (b) Les matrices sont-elles inversibles pour tout $n \geq 1$?

440. (Mines Télécom 2017)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a \\ a & 0 & 1/a^2 & 1/a^2 \\ a^2 & 1/a^2 & 0 & 1/a^3 \\ a^3 & 1/a^3 & 1/a^3 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

- (a) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I_4 et A .
 (b) Montrer que A est inversible et donner A^{-1} .
 (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I_4 + b_n A$.
 (d) Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

441. (Mines Télécom 2017)

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, inversible. Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A .

442. (CCP 2017)

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$R_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \forall \lambda \in \mathbb{C}, Q + \lambda M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

(a) Calculer

i. $\det(A_2(a_1, a_2)) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

ii. $\det(A_3(a_1, a_2, a_3)) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}$

(b) i. Calculer $\det(A_n(a_1, \dots, a_n))$.

ii. Soit D une matrice diagonale dont la diagonale contient la valeur 0. Montrer que $D \in R_n(\mathbb{C})$

(c) Soit A une matrice diagonalisable non inversible. Montrer que $A \in R_n(\mathbb{C})$.

(d) Soit $Q_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(Q_0 + \lambda M_0)$. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non-inversible appartient à $R_n(\mathbb{C})$.

(e) Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $R_n(\mathbb{C})$ pour l'inclusion.

443. (Mines Télécom 2017)

On considère la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que (U, U^2) est une famille libre.

(b) Trouver a et b dans \mathbb{R} tels que $U^3 = aU^2 + bU$.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U^n = \alpha_n U^2 + \beta_n U$.

(d) Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n .

(e) En déduire une expression de α_n en fonction de n .

444. (Mines Télécom 2017)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

445. (CCP 2017)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Pour tout entier n , on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f .

(a) Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Soit $P \in \text{Ker } f$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\text{Ker } f$.

(c) Déterminer le noyau et l'image de f_n .

- (d) Prouver que f est surjectif.
 (e) Trouver tous les polynômes P tels que $P(X + 1) - P(X) = X^2$.
 (f) En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^n k^2$.

446. (CCP 2017)

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

- (a) Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E .
 (b) Montrer qu'il existe une constante λ complexe telle que $f^2 = \lambda f$.

447. (CCP 2017)

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer M^2 .
 (b) Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

448. (CCP 2017)

A est une matrice symétrique réelle telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

- (a) Montrer que A est diagonalisable.
 (b) Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
 (c) En déduire que $A = 0$.

449. (Mines Télécom 2017)

(a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

- (b) Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $D = \text{diag}(1, 2, 4)$.
 (c) On considère l'équation : $M^2 = D$ d'inconnue M . Montrer que M et D commutent et en déduire les matrices M solutions. (d) Résoudre l'équation : $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

450. (CCP 2017)

Soit un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$ (où $f^3 = f \circ f \circ f$) et $f \neq 0$.

- (a) Calculer $\det(-Id)$; en déduire que f^2 est différent de $-Id$, que f n'est pas injectif.
 (b) Montrer que E est la somme directe de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + Id)$.
 (c) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + Id)$ est distinct de $\{0\}$.

Soit x tel que $f^2(x) \neq 0$; montrer l'existence d'un tel vecteur x , puis montrer que $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + Id)$.

- (d) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + Id)$ est de dimension 2.
 (e) Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

451. (CCP 2016)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f_1, \dots, f_k des endomorphismes non nuls de E vérifiant :

Pour tous i et j distincts dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, $f_i \circ f_j = 0$ et $f_1 + f_2 + \dots + f_k = \text{Id}_E$.

(a) Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, calculer $f_i \circ (f_1 + \dots + f_k)$. En déduire que f_i est un projecteur.

(b) i. Justifier que la somme $\text{Im } f_1 + \dots + \text{Im } f_k$ est directe.

ii. Montrer que $E = \text{Im } f_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_k$.

Dans toute la suite \mathcal{B} désigne une base de E adaptée à cette décomposition.

(c) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des complexes deux à deux distincts et soit $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$.

i. Montrer que la matrice de f dans \mathcal{B} est une matrice diagonale D que l'on précisera.

ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de f^p en fonction de p , des f_i et des α_i .

(d) i. Montrer que la famille (f_1, \dots, f_k) est libre.

ii. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la famille $(f_i, \text{Id}_E, f, \dots, f^{k-1})$ est liée.

(e) Montrer que la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{k-1})$ est libre.

452. (Mines Télécom 2016)

On note $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$. En déduire les matrices qui commutent avec A .

453. (CCP 2016)

Noyau et image de $M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

454. (CCP 2016)

A de coefficients a_{ij} donnés par $a_{in} = a_{ni} = i$, tous les autres étant nuls, est-elle diagonalisable ? Donner son spectre.

455. (EIVP 2016)

Donner le rang et les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

Est-elle diagonalisable ?

456. (Mines Télécom 2016)

Discuter et résoudre $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

457. (Mines Télécom 2016)

Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n , vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$, alors $f^n = 0$.

458. (ENSEA 2016)

On donne $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$ où x, y et z sont trois complexes.

(a) Donner l'existence de \mathbb{C}^3 telle que $M = C^t C$.

(b) Donner le rang de M suivant x, y et z .

(c) Montrer que M est semblable à $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on calculera a en fonction de x, y

et z .

(d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

459. (ENSEA 2016)

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$

460. (CCP 2016)

(a) Soit f un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E . Établir une relation entre le rang et la trace de f .

(b) Soit f un endomorphisme de E tel que $\text{rg } f = \text{tr } f = 1$. Montrer que f est un projecteur.

461. (Mines Télécom 2016)

Soit x_1, x_2, \dots, x_{n+1} des éléments distincts de \mathbb{K} .

Soit θ l'application linéaire qui, au polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, associe $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{n+1}))$.

(a) Montrez que θ est un isomorphisme.

(b) Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) la base naturelle de \mathbb{K}^{n+1} ; on définit $L_i = \theta^{-1}(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Explicitiez L_i

(c) La famille (L_1, \dots, L_{n+1}) est-elle une base de $\mathbb{K}_n[X]$?

Pensez à factoriser L_i par ses racines

462. (CCP 2016)

Montrer que 0 est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$ et donner la dimension

du sous-espace propre associé. A est-elle diagonalisable?

463. (CCP 2016)

(a) Montrer que $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1} M\}$, où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer que $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(b) On choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

(c) Montrer que, si A est inversible, $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Étudier la réciproque.

(d) On note $u_k = \dim \Gamma_k$. Montrer que (u_k) est croissante et qu'il existe un plus petit entier p tel que $u_p = u_{p+1}$.

(e) Montrer que $p = 2$ si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre.

464. (CCP 2016)

$C = \{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), {}^t\phi(M) = \phi({}^tM)\}$, $\phi_P(M) = {}^tPMP + {}^tP^tMP$ où P est donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(a) Montrer que si M est inversible, tM l'est aussi et exprimer $({}^tM)^{-1}$ en fonction de M^{-1} . Montrer que $\phi_P \in C$ et trouver $\text{Ker } \phi_P$ quand P est inversible.

(b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace \mathcal{S}_n des matrices symétriques et de celui \mathcal{A}_n des matrices antisymétriques.

(c) Montrer que $\phi \in C$ si et seulement si $\phi(A_n) \subset A_n$ et $\phi(S_n) \subset S_n$.

(d) On choisit $n = 2$ et P ni nulle ni inversible ; montrer que $\text{tr}(\phi_P(M)) = 2 \text{tr}(\phi(M))^2$

465. (CCP 2016)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Posons $r = \text{rg } u$.

(a) Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Montrer que $n \geq 2r$.

(b) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice dans la base \mathcal{B} de u soit :

$$\begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{n-r,n-r} & O_{n-r,r} \end{pmatrix}$$
 que l'on peut noter abusivement $\begin{pmatrix} O & I_r \\ O & O \end{pmatrix}$.

466. (CCP 2015)

Soit a appartenant à \mathbb{R}^* , f_a un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont M_a est la représentation matricielle dans la base canonique :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a+1 & -a \\ 4a & 4a & -2a+1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $\det(M_a)$. En déduire que f_a est bijective.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de $f_a \cdot f_a$ est-il diagonalisable ?

(c) Montrer que $\text{Ker}(f_a - Id)$ est un plan de \mathbb{R}^3 . Montrer que $\text{Im}(f_a - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f_a - Id)$

Soit E un espace euclidien de dimension n , $n \geq 2$, soit u et v non nuls appartenant à E . On définit f qui à x dans E associe $x + (x | v)u$

(d) Montrer que f est un endomorphisme de E .

(e) Montrer que $\text{Ker}(f - Id)$ est de dimension $n - 1$ et déterminer $\text{Im}(f - Id)$.

(f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de $f \cdot f$ est-il diagonalisable ? (g) Montrer que $\text{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f - Id)$.

(h) Montrer que la matrice de f dans une certaine base peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) On définit une transvection par les deux conditions :

— $\text{Im}(f - Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f - Id)$

— $\text{Ker}(f - Id)$ est un sous-espace de dimension $n - 1$

Montrer que toute transvection peut se représenter matriciellement sous la forme de la question précédente.

467. (Télécom SudParis 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme de E supposé diagonalisable.

Quelles conditions sur les valeurs propres de f en font un endomorphisme cyclique ?

Note : f est cyclique ssi : il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

468. (Mines Télécom 2015)

Soit la matrice carrée de taille n

11 11

10 01

.....

10 01

11 11

exemple : $n = 4$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice est diagonalisable et identifier les couples valeurs propres / vecteurs propres.

469. (TPE-EIVP 2015)

Soient f et g deux endomorphisme tel que $f \circ g \circ f = f$

(a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.

(b) Soient les propositions suivantes :

i. $f \circ g \circ f = f$

ii. $g \circ f \circ g = g$

iii. $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$

Montrer que i et ii entraînent iii et iii et i entraînent ii

470. (Mines-Télécom 2015)

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

M est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Donner une matrice de passage qui diagonalise M . (b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$

Montrer que B est semblable à $C = \begin{pmatrix} 3A & O \\ O & -A \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

471. (CCP 2015)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = Q$ où $Q = P(X+1) - P(X)$

(a) On définit $f_n \in L(\mathbb{R}_n[X])$ où $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_n(P) = f(P)$.

Donner la matrice de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ ($1, X, X^2, X^3$).

(b) Soit $P \in \text{Ker}(f)$.

i. Montrer que $P - 0$ admet une infinité de racines.

ii. Déterminer $\text{Ker}(f)$.

(c) i. Déterminer l'image et le noyau de f_n .

ii. En déduire que f est surjective.

(d) Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$

(e) $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] / \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$, on admet que H et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$

Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists! P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$ et $\int_0^1 P(t)dt = 0$.

472. (CCP 2015)

$$\text{Soit } U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice M est p nilpotente (avec $p \in \mathbb{N}^*$) si $M^p = 0$.

(a) Mq U est 3-nilpotente

(b) i. Soit A une matrice m -nilpotente. Mq $P^{-1}AP$ est m -nilpotente

ii. Parmi les matrices nilpotentes, lesquelles sont inversibles ?

(c) i. Soit A une matrice 3-nilpotente. Montrer que $I_n + A$ est inversible

ii. Montrer que $I_n + aA$ est inversible (où a est un réel)

473. (Mines Télécom 2015)

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie ainsi :

$$a_{i,i} = 2 \cos(\theta) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq n-1,$$

$$a_{n,n} = \cos(\theta)$$

$$a_{i,j} = 1 \text{ si } |i-j| = 1,$$

$$a_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas.}$$

Calculer $\det(A_n)$.

474. (Mines Télécom 2015)

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^2 . Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires sauf si $f^2 = 0$ et f n'est pas nul.

475. (Mines Télécom 2015)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. (a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

(b) Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(A, I_2)$.

476. (Mines Télécom 2015)

Soit $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-1)(X-2)P' - 2XP \in \mathbb{R}[X]$

(a) Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme.

(b) Donner ses éléments propres.

477. (Mines Télécom 2015)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On admet la relation } A^2 + A - 2I_3 = 0.$$

(b) i. Montrer que A est inversible, et donner A^{-1} .

ii. Donner les valeurs propres de A .

iii. Déterminer les sous-espaces propres de A .

iv. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(c) Trouver les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) vérifiant

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 2, \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ z_n = 3, \end{cases} \quad x_n - y_n + z_n$$

478. (CCP 2015)

(a) Montrer que f défini par $f(P)(X) = \frac{X^2 - 1}{2}P''(X) - XP'(X) + P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On choisit $n = 3$; donner la matrice de f dans la base canonique et montrer que c'est un projecteur.

(c) Donner son noyau et son image.

(d) On revient au cas général; montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(X, 1 + X^2)$

(e) Montrer que $Q \in \text{Im } f$ si et seulement si $Q'(1) = Q'(-1) = 0$ et donner une base de $\text{Im } f$.

(f) Quelles sont les valeurs propres de f ? Est-il diagonalisable?

479. (CCP 2015)

(a) Montrer que T , définie sur l'espace E des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} par $T(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ est linéaire.

(b) Montrer que $T(f)$ est continue en 0 puis que T un endomorphisme de E .

(c) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T .

(d) Soit λ une valeur propre de T , de vecteur propre associé f ; montrer que f est solution de $y' - \frac{1-\lambda}{\lambda x}y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* et en déduire que le spectre de T est $]0, 1]$.

480. (CCP 2015)

(a) Montrer que l'ensemble E des $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel dont on donnera une base.

(b) Trouver un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

481. (CCP 2015)

(a) Montrer que, si M est réelle, carrée d'ordre n et nilpotente, elle n'est pas inversible, admet 0 comme unique valeur propre et sera diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$; montrer que, si tous les b_i sont nuls, M est

diagonalisable si et seulement si tous les a_i sont nuls.

(d) On suppose tous les a_i nuls; donner une CNS pour que M soit diagonalisable.

(e) Montrer que M admet au plus deux valeurs propres complexes non nulles.

482. (CCP 2015)

On note D_n le déterminant de la matrice carrée de taille n , dont la diagonale est composée de 4, les sur et sous diagonales de 2, les autres coefficients étant nuls. (a) Trouver une relation entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n . (b) Calculer D_n . (c) La matrice associée est-elle inversible?

483. (CCP 2015)

A complexe, carrée d'ordre $n \geq 3$, de rang 2, de trace nulle et telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible, admet-elle 0 pour valeur propre?

Donner le cardinal de son spectre. Est-elle diagonalisable?

484. (CCP 2015)

(a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que l'ensemble F_λ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AM = \lambda M$ est un espace vectoriel.

(b) Trouver une base de F_λ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de A , F_λ est réduit à 0.

(d) Montrer que si λ est valeur propre de A , F_λ n'est pas réduit à 0 (on pourra choisir une matrice M dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la première qu'on choisira astucieusement).

(e) Montrer que $\dim F_\lambda = n \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ (on pourra construire une matrice M en fonction des vecteurs propres de A).

(f) Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A défini par $\phi_A(M) = AM$, l'est aussi.

485. (CCP 2015)

Soient s une symétrie distincte de $\pm Id$ d'un espace E de dimension n et ϕ défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi(f) = \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$ (a) Calculer $\phi(Id)$ et $\phi(s)$.

(b) Montrer que ϕ est une endomorphisme.

(c) Donner une relation entre E et les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de s , associés aux valeurs propres 1 et -1.

(d) Montrer que $f \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.

(e) Soit f un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ ; donner, pour $x \in E_1$ puis pour $x \in E_{-1}$, une relation entre $f(x)$ et $s \circ f(x)$.

(f) Montrer qu'il existe f non nul tel que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.

(g) Montrer que les valeurs propres de ϕ sont $-1, 0$ et 1 .

486. (CCP 2015)

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $f(x) = x \operatorname{ch} x$, $g(x) = x \operatorname{sh} x$ et F le sous-espace vectoriel engendré par ch , sh , f et g .

(a) Justifier que toute fonction h de F admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le donner explicitement.

(b) Justifier que $B = (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est libre dans E . Quelle est la dimension de F ?

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in F$, on pose $T_\lambda(h)(x) = xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$.

Montrer que T_λ est un endomorphisme de B dont on donnera la matrice dans B .

(d) Montrer que T_λ est bijectif si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2\}$.

(e) Déterminer le noyau et l'image de T_2 .

(f) Résoudre $xy'' - 2y' - xy = \operatorname{ch} x$ dans F .

487. (TPE-EIVP 2015)

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer A^n .

(b) On définit la suite (u_n) par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}$.

(c) Exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1 . La suite converge-t-elle?

488. (TPE-EIVP 2015)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes C_1, \dots, C_n et B de colonnes $K_i = \sum_{j \neq i} C_j$.

Calculer le déterminant de B en fonction de celui de A pour $n = 3$, puis pour tout $n \neq 0$.

489. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que, si f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g \circ f = f$, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(b) Montrer que $\text{Im } f = \text{Im}(f \circ g)$ et que $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f)$.

(c) Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors $\text{rg } f = \text{rg } g$.

(d) Montrer réciproquement que si $f \circ g \circ f = f$ et $\text{rg } f = \text{rg } g$ alors $g \circ f \circ g = g$.

490. (TPE-EIVP 2015)

(a) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie, tel que $u^3 = -u$

(b) Montrer que, si λ est valeur propre de u , $\lambda^3 = -\lambda$.

(c) Quelles sont les valeurs propres réelles de u ? Est-il diagonalisable sur \mathbb{R} ?

(d) Montrer que $\text{Ker } u$ est en somme directe avec $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$. (e) Montrer que si F est stable par u et v la restriction de u à F , alors $v^2 = -\text{id}$.

491. (TPE-EIVP 2015)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que si $A^2 + A + I_n = 0$, alors n est pair et que si $A^3 + A^2 + A = 0$, alors $\text{rg } A$ est pair.

492. (Télécom SudParis 2015)

On dit qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n est cyclique, s'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Soit f un endomorphisme de E diagonalisable : à quelle(s) condition(s) sur ses valeurs propres est-il cyclique?

493. (CCP 2015)

$$\text{Soit } D_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}.$$

Trouver une relation de récurrence vérifiée par D_n et le calculer.

494. (CCP 2015)

(a) Donner la matrice F dans la base canonique de l'endomorphisme f qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = P'$

(b) Donner le spectre de f ; est-il diagonalisable?

(c) Montrer que g défini par $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g(X^{n-k}) = X^k$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) $h = g \circ f \circ g^{-1}$ est-il diagonalisable? Écrire sa matrice H dans la base canonique.

(e) Trouver a et b tels que $f(P)(X) + h(P)(X) = aXP + b(X^2 - 1)P'$.

(f) Calculer $\det(h + f)$.

495. (CCP 2015)

(a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A qui a des 1 sur la première et la dernière ligne, sur la première et la dernière colonne, sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

(b) Est-elle diagonalisable?

(c) Quelle est la dimension du sous espace propre associé à 1?

(d) Quelles sont les autres valeurs propres?

496. (CCP 2015)

(a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables et que $A + B$ ne l'est pas.

(b) Montrer que l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

(c) Quelles sont les matrices de T diagonalisables ?

(d) Montrer que l'ensemble F des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à la matrice nulle et que $\dim F \cap T \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

497. (CCP 2015)

(a) Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension n .

(b) Montrer que T , défini par $T(v) = u \circ v - v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(c) On choisit $n = 2$, $B = (e_1, e_2)$ une base de E , $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.

(d) Donner la matrice de u dans B , vérifier qu'il est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

(e) Déterminer son noyau et son image ; sont-ils supplémentaires ?

(f) Calculer $T^2(v)$ en fonction de u et v , puis calculer $T^3(v)$ et en déduire que T est nilpotent d'un indice à déterminer

498. (CCP 2015)

(a) Soit f un endomorphisme non nul d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $f^3 + f = 0$

(b) Calculer $\det(-Id)$ et montrer que $f^2 - Id$.

(c) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } (f^2 + Id)$ et que $\text{Ker } (f^2 + Id) \neq \{0\}$.

(d) Montrer que si x est un vecteur non nul de $\text{Ker } (f^2 + Id)$, $(x, f(x))$ en est une famille libre.

(e) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition de E .

(f) Montrer une égalité faisant intervenir le rang de la somme de fonctions composées.

499. (CCP 2015)

(a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Exprimer C^{2k} et C^{2k+1} en fonction de k, C et C^2 .

(c) Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{2n} (k+1)C^k$ est combinaison linéaire de I_3, C et C^2 .

(d) Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

(e) Mêmes questions pour $f_1(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$ et $f_2(x) = \sum_{n \geq 0} (2n+1)x^{2n}$.

(f) Montrer que (S_n) converge vers une fonction f que l'on exprimera en fonction de k, C et C^2 .

(g) Calculer $(I_3 + C)^2 S$ et donner une autre valeur de S .

500. (CCP 2015)

$$(a) M_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (-1)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ est-elle diagonalisable?}$$

(b) Donner les valeurs propres de M_2 .

(c) Montrer que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M_3 et donner la valeur propre associée.

Donner les valeurs propres de M_3 .

(d) Donner les coefficients diagonaux de M_n^2 et sa trace.

(e) Quel lien y a-t-il entre la trace et les valeurs propres?

(f) Pour $n = 2p$, montrer que -2 et 0 sont valeurs propres d'ordre au moins égal à $p - 1$.

(g) Si $n \geq 4$, combien de valeurs propres reste-t-il à trouver?

(h) Écrire un système reliant les valeurs propres de M_{2p} , sa trace et la trace de M_{2p^2} .

(i) Trouver toutes les valeurs propres de M_n .

501. (CCP 2015)

(a) Soit ϕ non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , telle que $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

(b) Montrer que si $\phi(I_n) = 0$ alors ϕ est nulle et en déduire que $\phi(I_n) = 1$.

(c) Montrer que si A et B sont semblables, $\phi(A) = \phi(B)$.

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on pose $\psi(a, b, c, d) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$.

(d) Si $f(x) = \psi(e^x, 0, 0, 1)$, montrer que $f(x+t) = f(x)f(t)$.

(e) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(t) = e^{\alpha t}$ où α est une constante à déterminer.

(f) Soient deux réels strictement positifs λ et μ ; montrer que $f(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 \lambda_2)^\alpha$.

(g) Soient $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ toutes deux carrées d'ordre n ;

quel est le rang de $J_r K_r$? Montrer qu'elles sont semblables.

(h) On suppose $\phi(A) \neq 0$; montrer que $\phi(J_r) = 0$ pour tout $r < n$ et en déduire que A est inversible.

502. (CCP 2015)

Montrer que si A est une matrice symétrique réelle de taille n vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = I_n$, alors $A^2 = I_n$.

503. (CCP 2015)

(a) Montrer qu'une matrice d'ordre impair à coefficients réels admet au moins une valeur propre réelle.

(b) Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair à coefficients réels n'admet que 0 pour valeur propre et que son polynôme caractéristique est impair.

504. (CCP 2015)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1/a & 1 & a & a^2 \\ 1/a^2 & 1/a & 1 & a \\ 1/a^3 & 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$; calculer M^2 et montrer que ses valeurs propres sont

dans $\{0, 4\}$.

505. (CCP 2015)

Si A symétrique, réelle, d'ordre n vérifie $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$, a-t-on $A^2 = I_n$?

506. (CCP 2015)

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr } A = 0$, $\text{rg } A = 2$ et $A - I_n$ est non inversible.
- (b) Montrer que 0 est valeur propre de A et donner son ordre de multiplicité.
- (c) Trouver toutes les valeurs propres de A .

507. (CCP 2015)

(a) On définit D et t sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $D(P) = P'$ et $t(P)(X) = P(X + 1)$.

(b) On note $C(D)$ le commutant de D dans $\mathbb{R}[X]$; montrer que $t \in C(D)$.

(c) On pose $e_k = \frac{X^k}{k!}$; calculer $D^i(e_n)$ et en déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

(d) Montrer que (Id, D, D^2, \dots, D^n) est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

(e) Soit $u \in C(D)$; montrer qu'il existe (b_0, \dots, b_n) tels que $u(e_n) = \sum_{k=0}^n b_k D^k(e_n)$ et en

déduire que $u(D^i(e_n)) = \sum_{k=0}^n b_k D^k \circ D^i(e_n)$

(f) Montrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ dont on donnera la dimension.

508. (CCP 2015)

Soit $n \geq 2$

(a) Montrer que 0 est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$.

(b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

509. (CCP 2015)

(a) On suppose qu'il existe un endomorphisme f non nul de \mathbb{R}^4 tel que $f^2 = 0$.

(b) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

(c) Rappeler le théorème du rang et en déduire que $\text{rg } f \leq 2$.

(d) Justifier, si f est un endomorphisme de rang 1, l'existence de 4 vecteurs $b, c, d, f(d)$ de \mathbb{R}^4 , tels que $f(d)$ soit une base de $\text{Im } f$ et que $(f(d), b, c)$ soit une base de $\text{Ker } f$.

(e) $(f(d), b, c, d)$ peut-elle être une base de \mathbb{R}^4 ?

(f) Écrire la matrice de f dans cette base.

(g) Montrer que, si f est de rang 2, $\text{Ker } f = \text{Im } f$ et qu'il existe une base de la forme $(f(u), f(v))$ de $\text{Im } f$

(h) Trouver une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Écrire matriciellement les endomorphismes satisfaisant la condition $f^2 = 0$.

(j) Montrer que la comatrice M de chacune de ces matrices vérifie aussi $M^2 = 0$

510. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels, est 3-nilpotente.

(b) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est m -nilpotente, $m \leq n$, $P^{-1}AP$ l'est aussi, pour toute matrice inversible P . Quelles matrices nilpotentes sont inversibles? (c) Montrer que si A est 3-nilpotente, $A + I_n$ est inversible (on pourra chercher l'inverse sous la forme d'un combinaison linéaire de I_n , A et A^2).

(d) Montrer que, pour tout réel non nul α , $A + \alpha I_n$ est inversible.

(e) Montrer que A nilpotente est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(f) Pour A m -nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\exp A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} A^k$; montrer que $\exp A$ est inversible.

511. (CCP 2015)

(a) On note E l'espace vectoriel de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

(b) Montrer que ϕ défini par $\phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de E .

(c) Résoudre $y' - xy = 0$ et en déduire $\text{Ker } \phi$. Est-il injectif? Surjectif?

(d) Soit $g(x) = (1 + x^2)e^{x^2}$; résoudre $y' - xy = g(x)$ à l'aide de $\int_0^x (1 + t^2)e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

(e) Montrer que $f(x) = h(x)e^x$ vérifie $\phi(f) = g$ et $f(0) = 0$ pour une fonction h que l'on explicitera et en déduire la valeur de $\int_0^x (1 + t^2)e^{\frac{t^2}{2}} dt$

(f) ϕ induit-il un endomorphisme sur le sous-espace P des fonctions polynomiales? Si oui, sa restriction est-elle injective? Surjective?

512. (CCP 2015)

Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une base de son image.

513. (CCP 2015)

(a) Pour A fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que f défini par $f(M) = -M + \text{tr}(M)A$ est un endomorphisme.

(b) Si $\text{tr}(A) = 1$, montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(A)$ et $\text{Im } f = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$.

(c) On suppose $\text{tr}(A) \neq 1$; trouver une relation entre $f^2(X)$, $f(X)$ et X et en déduire que f est bijective puis exprimer f^{-1} .

(d) Résoudre $f(X) = B$

(e) Montrer qu'il existe (E_2, \dots, E_{n-2}) telles que (A, E_2, \dots, E_{n-2}) soit une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(f) Trouver une CNS sur $\text{tr}(A)$ pour que f soit diagonalisable.

514. (CCP 2015)

ϕ_n , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi_n(P)(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(1 + X \cos t) dt$, est-il diagonalisable? Si elle existe, trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(\phi_n)$.

515. (CCP 2015)

(a) La matrice A dont les coefficients a_{ij} vérifient $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i1} = a_{1i} = a_{ii} = 1$ est-elle diagonalisable (on pourra s'intéresser à $A - I_n$)?

(b) En déduire le polynôme caractéristique de A .

516. (CCP 2015) (a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie ${}^t M = M^2$, alors $M^4 = M$.

(b) Quelles sont les valeurs possibles de $\det M$? Montrer que $Sp(M) \subset \{0, 1\}$.

(c) Montrer que si M est inversible, elle est aussi orthogonale.

(d) Si M n'est pas inversible, on suppose M semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $b \in \{0, 1\}$; que peut-on dire si $b = 0$?

(e) Montrer que si $b = 1$, M est diagonalisable et que $M^2 = M$; qu'en déduit-on?

517. (CCP 2015)

Montrer que le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de la forme

$X^{n-2}(X + \lambda)(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

518. (CCP 2015)

Soient deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E .

Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } u \circ v \Leftrightarrow \text{Im } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.

519. (CCP 2015)

Montrer que $f(P) = P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

520. (CCP 2015)

(a) Soit f un endomorphisme de E , espace de dimension finie, tel que $\text{rg } f = \text{rg } f^2$.

(b) Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$; $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$; $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

521. (CCP 2015)

(a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a pour polynôme caractéristique :

(b) $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{tr } M + \det M$.

(c) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose qu'il existe un complexe z_0 tel que $A + z_0 B$ admette une unique valeur propre et soit diagonalisable.

(d) Montrer que $A = -z_0 B + \alpha I_2$.

(e) On suppose que, pour tout complexe z , $A + zB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable; Montrer que le déterminant $\Delta(z)$ de $A + zB$ est un polynôme qui n'admet pas de racine dans \mathbb{C} .

(f) Montrer que le coefficient de z^2 est $a_2 = \text{tr}(B)^2 - 4 \det B$.

Manque fin.

522. (CCP 2015)

(a) On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans \mathbb{R} .

(b) Pour $f \in E$, on pose $D(x) = xf'(x)$ et $\phi_n(x) = x^n$. On admet que D est un endomorphisme de E .

(c) Calculer $D^k(\phi_n)$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ puis trouver les noyaux de D, D^2 et D^3 .

(d) Montrer que $\sum na_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence R .

(e) Montrer que $S(x) = \sum a_n x^n$ est dans E puis que $D^k(S(x))$ est aussi une série entière.

(f) Pour $P \in \mathbb{R}_r[X]$, donner une expression simple de $P(D)(S)$. (g) On choisit $I =]0, 1[$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$; Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_n de degré n tel que $D^k(f) = P_n f^{k+1}$.

Manque dernière question.

523. (CCP 2015)

Soient u et v linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 respectivement, telles que $u \circ v$ est un projecteur de rang 2. Montrer que $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im } u$.

524. (CCP 2015)

(a) Montrer que des suites réelles u vérifiant $u_{n+4} = 2u_{n+3} + 11u_{n+2} - 12u_{n+1} - 36u_n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note E cet espace.

(b) On admet que ϕ , défini par $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est un isomorphisme de E dans \mathbb{R}^4 ; quelle est la dimension de E ?

(c) Montrer que T défini par $T(u) = v$ avec $v_n = u_{n+1}$ est un endomorphisme de E .

(d) Montrer que $(T + 2Id)^2 \circ (T - 3Id)^2 = 0$, puis que si λ est valeur propre de T , elle est racine de $(x + 2)^2(x - 3)^2$; en déduire les éléments propres de T .

(e) Est-il diagonalisable?

(f) Montrer, sans détermination préalable, que $\text{Ker}(T + 2Id)^2 \cap \text{Ker}(T - 3Id)^2 = \{0\}$, $\text{Im}(T - 3Id)^2 \subset \text{Ker}(T - 3Id)^2$ puis, après avoir rappelé le théorème du rang, que $E = \text{Ker}(T + 2Id)^2 \oplus \text{Ker}(T - 3Id)^2$.

(g) Donner une base de E .

525. (Navale 2015)

Montrer que f défini par $f(P)(X) = XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le spectre. Est-il diagonalisable?

526. (Navale 2015)

Donner le rang de la matrice réelle, carrée de taille n , de coefficient $a_{ij} = (n + i + j - 2)^2$.

527. (Navale 2015)

Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , telles que $AB - BA = I_n$

Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.

528. (Mines Télécom 2015)

Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} (m-1)x + my + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}.$$

529. (Mines Télécom 2015)

Soient deux matrices A et B , carrées d'ordre n , à coefficients entiers et telles que $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\det(A + kB) = \pm 1$; déterminer $\det A$ et $\det B$.

530. (Mines Télécom 2015)

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

531. (Mines Télécom 2015)

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; calculer A^n

(b) On donne $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et
$$\begin{cases} u_{n+1} = -6u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 5u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 5w_n \end{cases}.$$

Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0 .

532. (Mines Télécom 2015)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_{i1} = a_{nj} = 1, a_{n1} = 1$, tous les autres étant nuls. A est-elle diagonalisable? Calculer A^n .

533. (Mines Télécom 2015)

Que peut-on dire de A symétrique, réelle et nilpotente?

534. (Mines Télécom 2015)

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

(b) Calculer A^n . A est-elle inversible? Si oui, calculer A^{-1} .

535. (Mines Télécom 2015)

Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver son image et son noyau avec un minimum de calculs.

Est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser,

sinon, dire si elle est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

536. (Mines Télécom 2015)

Donner, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Est-elle inversible? Diagonalisable?

537. (Mines Télécom 2015)

Résoudre l'équation $AB - BA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

538. (Mines Télécom 2015)

Soit A symétrique, réelle, de taille n , telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de A et en déduire que $A = 0$.

539. (Mines Télécom 2015)

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

540. (Mines Télécom 2015)

- (a) Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, x + y + z - t = 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel dont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base.
- (b) Montrer que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ 2x + 2y + z + t \\ x - y + z - t \end{pmatrix}$ est linéaire, donner son rang et son noyau. Est-ce un isomorphisme ?

541. (Mines Télécom 2015)

$$\text{Calculer } D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \cos a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos a \end{vmatrix}.$$

542.

543. (Mines Télécom 2015)

- (a) Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (b) Donner, avec un minimum de calculs, l'image et le noyau de A .
- (c) Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

544. (Mines Télécom 2015)

Décrire l'endomorphisme f de matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

II.14. Algèbre bilinéaire.

545. (Mines-Ponts 2023 - sans préparation) (Martin)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax \mid x \rangle > 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$; montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\langle A^{k+1}y \mid y \rangle}{\langle A^k y \mid y \rangle}$$

existe et est égale à une valeur propre de A .

545 bis (ENSEA Cergy 2022) (Paul)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Pourquoi A est-elle diagonalisable ?
- (b) Soit U la matrice colonne dans la base canonique du vecteur $u = (x, y, z)$. Calculer $U^T A U$.
- (c) A est-elle trigonalisable ?
- (d) Une matrice diagonalisable est-elle trigonalisable ?

546. (CCINP 2024 - sans preparation) (Cecilia)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in E$, $u \neq O_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq O_{\mathcal{L}(E)}$:

$$f : x \mapsto x + \langle x | u \rangle \cdot u$$

1. Montrer que $f \in O(E) \implies \|u\|^2 = -2$.
2. Montrer la réciproque.

546 bis (CCINP 2022) (Paul)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On pose $(f | g) = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt$, pour tous $f, g \in E$.

- (a) Montrer que E est un espace euclidien.
- (b) Calculer $\|\cos^2\|$.
- (c) Orthonormaliser (\sin, \cos) .

547. (CCINP 2022) (Kévin)

Soit E un espace euclidien tel que $\dim E > 3$.

On pose $f : x \mapsto \langle u | x \rangle u + \langle v | x \rangle v$, où (u, v) est une famille libre de E .

- (a) Montrer que f est un endomorphisme.
- (b) Trouver $\text{Ker } f$.
- (c) Question sur la diagonalisabilité.

547 bis. (Mines Tel 2024) (Léa)

Soit E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont 2π -périodiques ; pour $f, g \in E$ on note :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.
2. Calculer le projeté orthogonal de $x \mapsto \sin(x)$ sur $\text{Vect}(x \mapsto \cos(x); x \mapsto \cos(2x))$.

548. (CCINP 2021) (Célian)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\delta = AA^T - A^T A$

- (a) δ est-elle diagonalisable ?
- (b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de δ (comptées avec multiplicité). On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$
Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \leq \text{tr}(\delta)$.
- (c) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$.

548 bis (CCINP 2024 -sans preparation) (Ségoène)

Soit u une isométrie vectorielle de E euclidien et $\dim E = n \geq 1$. Montrer que $\ker(u - id)$ et $\text{Im}(u - id)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

549. (CCINP 2021)

Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On définit $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ par $\forall x \in E \quad f_\alpha(x) = x + \alpha(x | a)a$. (a) Soit (e_2, \dots, e_n) une base de $\text{Vect}(a)^\perp$. Montrer que $\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

(b) i. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $f_\alpha \circ f_\beta$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$, et exprimer γ en fonction de α et β .

ii. A quelle condition sur α l'application f_α appartient-elle à $\mathcal{GL}(E)$? On montrera qu'alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha^{-1} = f_\theta$, et l'on exprimera θ en fonction de α .

(c) Soit $s_a : x \in E \mapsto x - 2(x | a)a$. On suppose trouvé un sous-espace vectoriel V de E vérifiant $s_a(V) = V$.

i. Montrer que $s_a \in \mathcal{O}(E)$.

ii. Montrer que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$, puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.

(d) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

(e) Soit $b \in E$ tel que (a, b) soit libre et $\|b\| = 1$. Montrer que $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a \iff (a | b) = 0$.

550. (Mines Télécom 2021)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\alpha \in \mathbb{R}$, et a un vecteur unitaire de E . On pose $f_\alpha(x) = x - \alpha \langle x, a \rangle \cdot a$.

(a) Montrer que f_α est un endomorphisme de E . Que dire de f_0 ?

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$. En déduire pour quelles valeurs de α , f_α est un automorphisme. Lorsque tel est le cas, préciser f_α^{-1} .

(c) Montrer que f_α est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

551. (CCINP 2021)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque : $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$

(a) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

i. Montrer que A est antisymétrique, et donner $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

ii. Montrer que f est antisymétrique.

iii. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux. Déterminer $\text{rg } f$. On revient désormais au cas général.

(b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

i. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.

ii. Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\dim(E)$ est paire.

iii. Montrer que si u est antisymétrique, alors $\text{rg } u$ est pair.

552. (CCINP 2021)

Soit E un espace euclidien tel que $\dim E \geq 3$. Soit $(u, v) \in E^2$ avec (u, v) libre et $f : x \mapsto \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que $\text{Vect}(u, v)$ est stable par E . (c) Soit $g = f|_{\text{Vect}(u, v)}$. Quelle est la matrice de g dans la base (u, v) ?

553. (CCINP 2019)

Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $h : x \mapsto x \ln(x)$ définie sur $]0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : x \mapsto x^n$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a,b} : x \mapsto x^2(\ln(x) - a - bx)^2$, définie sur $]0, 1]$. On pose

$F = \text{Vect}(P_1, P_2)$. On munit E du produit scalaire défini par : $\forall f, g \in E, (f, g) = \int_0^1 fg$

(a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{a,b}$ peut être considérée comme une fonction de E .

(b) Montrer que h peut être considérée comme une fonction de E . Calculer (h, P_n) pour tout n de \mathbb{N} .

(c) Calculer $(P_1, P_2), \|P_1\|$ et $\|P_2\|$.

(d) Trouver λ et μ tels que $Q_1 = \lambda P_1$ et $Q_2 = \frac{P_2 - \mu P_1}{\|P_2 - \mu P_1\|}$ forment une base orthonormée de F . Donner l'expression de la projection orthogonale de h sur F en fonction de Q_1 et Q_2 . On notera g ce projeté.

(e) On propose une autre méthode pour déterminer g .

Chercher $g = aP_1 + bP_2$ tel que $\int_0^1 x(h - g)(x)dx = 0 = \int_0^1 x^2(h - g)(x)dx$.

(f) Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 x^2(\ln(x) - a - bx)^2 dx$.

554. (CCINP 2019)

Soient $(E, (., .))$ un espace euclidien, $g \in O(E)$ et $f = id_E - g$.

Montrer que : $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$, puis l'égalité.

555. (CCINP 2019)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

(a) Donner une base de F et une base de F^\perp .

(b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

(c) Déterminer la distance de $(1, 2, 3)$ à F .

556. (CCINP 2019)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $A^t A A = I_n$.

(a) Montrer que A est symétrique.

(b) Montrer que $A = I_n$.

557. (CCINP 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On pose pour $P, Q \in E : (P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha) Q^{(k)}(\alpha)$.

(a) Montrer que $(., .)$ définit un produit scalaire sur E .

(b) Soit $f : P \mapsto (X - \alpha)P'(\alpha)$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .

558. (CCINP 2019)

(a) Montrer que h canoniquement associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie

$(P) : \forall x \in \mathbb{R}^3, \langle h(x), x \rangle = \|x\|^2$

(b) Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie (P) et $g = f - Id$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle g(x), x \rangle = 0$.

(c) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g et montrer que $0 \in Sp(g)$ en analysant le degré du polynôme caractéristique.

(d) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \langle g(y), x \rangle + \langle y, g(x) \rangle = 0$ et que $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont orthogonaux.

(e) On note e_1 un vecteur unitaire de $\text{Ker } g$, e_2 un vecteur unitaire de $\text{Im } g$; montrer que $g(e_2) \neq 0$ et que si $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

559. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $f_A(M) = AM - MA$ où $A \in S_n(\mathbb{R})$ est fixée, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(b) Si (X, Y) est dans $(\mathbb{R}^n)^2$, quelle est la taille de $X^t Y$? Expliciter ses coefficients en fonctions de ceux de X et Y .

(c) Montrer que l'on peut trouver X et Y tels que $X^t Y$ soit vecteur propre de f_A et donner la valeur propre associée; en déduire que f_A n'est pas bijectif.

(d) Montrer qu'il existe une famille (M_1, \dots, M_n) de vecteurs propres de A tels que : $\forall i \neq j, {}^t M_i M_j = 0$

(e) Montrer que f_A est diagonalisable et que $\dim \text{Ker } f_A \geq n$.

(f) Donner les valeurs propres de f_A si tous les coefficients de A valent 1.

560. (Mines Télécom 2019)

Montrer que, si e_1, \dots, e_n sont des vecteurs unitaires de E euclidien, tels que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$, alors ils constituent une base orthonormale.

561. (Mines Télécom 2019)

(a) Montrer que f , défini par $f(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les valeurs propres.

(b) Montrer que f est symétrique pour le produit scalaire $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

562. (CCINP 2019)

Donner une base orthonormale de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, z = 0, x + y + t = 0\}$.

Expliquer comment obtenir la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

563. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $(A | B) = \text{tr}({}^t AB)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.

(b) Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique puis que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

(c) En déduire que ${}^t AA = A^2 \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $n \geq 3$, il existe A non symétrique et telle que ${}^t AA = A^2$ (on les cherchera sous la forme $V^t U$ avec U et V dans \mathbb{C}^n).

(e) On choisit $n = 2$. Montrer que toutes les solutions à coefficients complexes de ${}^t AA = A^2$ sont symétriques.

564. (CCINP 2019)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

(a) Donner une base de F et F^\perp .

(b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

565. (Mines Télécom 2019)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et u une isométrie vectorielle.

- (a) Définir une isométrie vectorielle.
- (b) Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Justifier.
- (c) u admet-il nécessairement une ou des valeurs propres réelles? Justifier.

(d) La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Caractériser géométriquement u .

566. (CCINP 2019)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait les hypothèses $A^2 = A$ et $A^T = A$.

- (a) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{tr}(A)$.
- (b) Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}$.

Indication : on pourra penser au produit scalaire $(A | B) = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

567. (Mines Télécom 2019)

Soit E un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E . On fait l'hypothèse $\forall x \in E, (x | f(x)) = 0$

- (a) Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , montrer l'égalité $(x | f(y)) = -(y | f(x))$.
- (b) Montrer l'égalité $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$.
- (c) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{0\}$.
- (d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

568. (CCINP 2019)

On note u le vecteur $(1, 0, -3)$ de \mathbb{R}^3 , que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\text{Vect}(u)$ et q le projecteur orthogonal sur l'orthogonal de cette droite.

- (a) Déterminer la matrice représentative de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- (b) Déterminer une relation entre p et q .
- (c) En déduire la matrice représentative de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

569. (CCINP 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

- (a) Montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S = \pm 1$ et $\sigma = 0$.
- (b) Préciser une condition pour $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

570. (CCINP 2019, CCP 2018)

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall (x, y) \in E^2, (x | y) = 0 \Rightarrow (f(x) | f(y)) = 0$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E . (a) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}$, calculer $(f(e_i + e_j) | f(e_i - e_j))$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \|f(e_i)\| = \alpha$.

571. (CCP 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. On définit le produit scalaire dans E par $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Sur E , on définit également $\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(t)dt$ et $f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X$.

(a) i. Montrer que φ est linéaire.

ii. On admet que f_α est un endomorphisme de E . Pour cette question, on suppose $n = 3$. Donner la matrice A_α de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

iii. Déterminer le spectre de f_α , en déduire si f_α est bijective ou non. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

(b) On définit l'endomorphisme g_α sur E par $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.

i. Donner le rang de φ . Montrer que $(\text{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.

ii. Donner le spectre de g_α . Est-il diagonalisable ? Bijectif ?

iii. Montrer que : $\forall P \in E, \|g_\alpha(P)\| \leq (1 + 2|\alpha|)\|P\|$.

iv. En déduire qu'il existe M tel que $M = \sup_{P \in E \setminus \{0\}} \left(\frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|} \right)$. Donner la valeur de M .

572. (CCP 2018)

Soit (a, b) une famille libre de E euclidien de dimension n .

(a) Montrer que $\phi(x) = \langle x, b \rangle a + \langle x, a \rangle b$ est un endomorphisme de E dont on donnera le noyau et l'image.

(b) Trouver les valeurs propres de ϕ . Est-il diagonalisable ? Est-il symétrique ?

573.

574. (TPE-EIVP 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P, Q \in E$ on pose $(P | Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

(a) Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

(b) Calculer la distance entre le polynôme X^2 et le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$

575. (CCP 2018)

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(M | N) = \text{tr}({}^tMN)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $A = \begin{pmatrix} \text{ch } x - 1 & 4 \\ -2 & \text{sh } x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \text{ch } x + 1 & 3 \\ 6 & -\text{sh } x \end{pmatrix}$.

(a) A-t-on $(A | B) = 0$?

(b) Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Déterminer la distance de A à l'espace des symétriques.

576. (CCP 2018)

Soit $E = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum x_n^2 \text{ converge} \right\}$ et $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto x_0$$

(a) Calculer $(|a| - |b|)^2$, et montrer que $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab|$.

(b) i. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii. Montrer que f est une application linéaire de E dans \mathbb{R} .

(c) Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

Montrer que φ est bien définie sur $E \times E$ et que φ est un produit scalaire sur E .

En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$ est une norme sur E .

(d) On suppose que E muni de cette norme. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E , alors $(x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

(e) Soit $g : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E^2$, $\|g((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) - g((y_n)_{n \in \mathbb{N}})\| \leq k \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\|$.

577. (CCP 2018)

On se place dans \mathbb{R}^4 , on définit le plan \mathcal{P} par $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - y - 2z - t = 0 \end{cases}$.

Trouver une base orthonormale du plan \mathcal{P} et déterminer la distance du vecteur $u = (1, 0, -1, 0)$ au plan \mathcal{P} .

578. (TPE-EIVP 2018)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(M, N) \in E^2$, on pose $\Phi(M, N) = \text{tr}({}^t M N)$.

(a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E ; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(b) Montrer que $\forall (M, N) \in E^2 \quad \|MN\| \leq \|M\| \|N\|$.

L'examinatrice a de plus demandé une idée de la preuve de Cauchy-Schwarz.

579. (CCP 2018)

E est un espace euclidien et a, b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux.

(a) Soit $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E .

(b) On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $a \in \text{Vect}(e_1)$ et $b \in \text{Vect}(e_2)$. Préciser la matrice M de φ dans cette base.

(c) Préciser les éléments propres de φ et déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

(d) Généraliser l'étude à un espace de dimension n

580. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que $P : x + y + z = 0$ et $D : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

(b) Déterminer la matrice de la projection sur P parallèlement à D .

581. (Mines-Télécom 2017)

(a) Donner la forme de la matrice de $u(x) = \langle x, a \rangle a + \langle x, b \rangle b$ dans une base quelconque de E euclidien, sachant que a et b ne sont pas colinéaires.

(b) Déterminer le noyau et l'image de u . Est-il symétrique ?

582. (EIVP 2017)

(a) Montrer que u défini par $u(x) = k \langle x, a \rangle a + x$, où $a \in E$ euclidien et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est un endomorphisme symétrique, que l'on exprimera en fonction de Id et du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(a)$.

(b) Donner une condition sur k pour que u soit une isométrie.

583. (EIVP 2017)

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

584. (CCP 2017)

(a) Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f de $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ dans

la base canonique

(b) Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ tels que $v_1 = \frac{1}{\alpha} u_1, v_2 = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $v_3 =$

$\frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

(c) On note H la droite dirigée par v_1 .

Calculer $\langle f(v_2), v_1 \rangle, \langle f(v_3), v_1 \rangle$ et montrer que H^\perp est stable par f .

(d) Montrer que dans la base (v_1, v_2, v_3) , f a pour matrice $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$.

(e) Montrer que M n'est pas diagonalisable.

(f) En étudiant $f \circ r_1$, où r_1 est la réflexion par rapport au plan engendré par v_1 et v_3 , montrer que f est la composée de deux symétries.

(g) Montrer que f ne peut pas être la composée de deux réflexions.

585. (CCP 2017)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$

(a) Montrer que ϕ , définie par $\phi(P) = \int_{-1}^1 P(t)dt$ est linéaire, déterminer son rang et

montrer que $(\text{Ker } \phi)^\perp = \mathbb{R}_0[X]$

(b) Montrer que f_a , définie par $f_a(P)(X) = P(X) + 2a\phi(P)X$ est un endomorphisme dont on donnera la matrice dans la base canonique si $n = 3$.

(c) Est-il diagonalisable? Bijectif?

(d) Donner les valeurs propres de g_a défini par $g_a(P) = P + 2a\phi(P)$.

(e) Est-il diagonalisable? Bijectif?

586. (TPE-EIVP 2017)

Soit dans un espace euclidien, f telle que : $f(0) = 0$ et pour tout couple de vecteurs x, y
 $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

(a) Montrer que f conserve la norme.

(b) Montrer que f conserve le produit scalaire.

(c) Montrer que f est linéaire.

(d) Que peut-on conclure sur f ?

587. (Mines Télécom 2017)

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, a, b sont deux vecteurs de E non colinéaires.
 f est l'application $x \in E \mapsto \langle x, a \rangle a + \langle x, b \rangle b$.

- (a) Donner le format de la matrice de f dans une base quelconque de E .
- (b) Déterminer le noyau et l'image de f .
- (c) f est-elle symétrique?

588. (Mines Télécom 2017)

Soit E un espace vectoriel Euclidien de dimension p supérieure ou égale à 1. Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ une base orthogonale de E . Donner l'expression du projecteur orthogonal d'un vecteur x de E sur F , un sous-espace vectoriel de E . Des éléments de démonstration sont attendus.

589. (CCP 2016)

Soit E un espace euclidien. Soient a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls.

Soit $f : E \rightarrow E$

$$x \mapsto x - \langle a, x \rangle b$$

- (a) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle a, b \rangle \neq 1$.
- (b) Dans le cas f bijective, calculer f^{-1} .

590. (EIVP 2016)

Soit f endomorphisme de E euclidien tel que $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

(a) Calculer $\langle u + v, u - v \rangle$ où u et v sont deux vecteurs unitaires. (b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

(c) Conclure qu'il existe une isométrie g telle que $f = \alpha g$.

591. (TPE-EIVP 2016)

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2$

Démontrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E

592. (Mines Télécom 2016)

Soit $E = \{f \text{ continue sur } \mathbb{R}, f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}$.

(a) On pose $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ pour (f, g) dans E^2 ; montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

(b) Soit $F = \text{Vect}(\cos, x \mapsto \cos(2x))$; trouver le projeté orthogonal sur F de $x \mapsto \sin^2 x$.

593. (Mines Télécom 2016)

Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

(a) Montrer que l'intégrale est bien définie.

(b) Vérifier que $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Si $n \in \mathbb{N}$, on note T_n l'unique polynôme tel que $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ pour tout réel θ . Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

594. (CCP 2016)

Dans \mathbb{R}^3 , on considère p le projeté orthogonal sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de p , la projection orthogonale sur le plan \mathcal{P} , puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} à partir de celle de la projection.

595. (TPE-EIVP 2015)

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et on admet que pour $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_k$ est un produit scalaire sur E .

(a) Montrer que $H = \left\{ P \in E, \int_1^2 P(t) dt = 0 \right\}$ est un sev, et trouver sa dimension.

(b) Déterminer H^\perp et $d(1, H)$

596. (Mines Télécom 2015)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormale \mathcal{B} . On note $[a]$ la colonne des coordonnées du vecteur a dans la base \mathcal{B} . Soit $a \in E$, différent du vecteur nul.

(a) Montrer que $M = \frac{1}{t[a][a]} [a]^t [a]$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(a)$.

(b) Écrire en fonction de M la matrice de :

i. la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(a)$;

ii. la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$;

iii. le projecteur orthogonal par rapport à l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$.

597. (CCP 2015)

Quelle est la nature de l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 euclidien de matrice $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique ? On précisera ses éléments caractéristiques.

598. (CCP 2015)

Montrer que f , définie sur E euclidien par $f(x) = x - (a | x)b$, où a et b sont deux vecteurs non nuls de E , est un endomorphisme et qu'il est bijectif si et seulement si $(a | b) \neq 1$.

599. (CCP 2015)

Soit f un endomorphisme de E euclidien qui conserve l'orthogonalité.

(a) Montrer que si x et y sont unitaires et vérifient $\langle x+y, x-y \rangle = 0$ alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$

(b) Montrer que $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

600. (CCP 2015)

(a) Rappeler la définition d'un produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) On note $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $P_n = \sqrt{n}(1-X)^{2n}$.

(c) Calculer $\|P_n\|$ et montrer qu'on ne peut pas trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, Q \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

601. (CCP 2015)

Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$; y a-t-il un problème en 1 ?

602. (CCP2015)

On munit \mathbb{R}^3 euclidien muni de sa base canonique.

(a) Déterminer une base orthonormale de $P : x + y + z = 0$.

(b) Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P ?

603. (CCP 2015)

(a) Montrer que $s = f \circ f$ où f est bijective sur E euclidien et vérifie $\forall (x, y) \in E^2, - \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle$, est un endomorphisme symétrique.

(b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , $f(x)$ en est un autre.

(c) Montrer que $\lambda\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$; qu'en déduit-on ?

(d) Montrer que si $F = \text{Vect}(x, f(x))$, F et F^\perp sont stables par f .

(e) Soit g l'endomorphisme induit par f sur F ; montrer qu'il existe une base B de F dans laquelle g a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ où a est à exprimer en fonction de λ .

(f) On suppose que si V est le sous-espace propre associé à λ , il existe m vecteurs x_1, \dots, x_m de V tels que $(x_1, f(x_1), \dots, x_m, f(x_m))$ soit une base de V .

(g) Montrer que E est de dimension paire.

(h) Vérifier l'hypothèse faite.

604. (CCP 2015)

(a) Soient ϕ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $f(x) = \langle x|\phi(x) \rangle - 2 \langle x|u \rangle$.

(b) Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$ et montrer que f admet $x_0 = (2, 1)$ pour point critique.

(c) Montrer que $f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h_1^2 + \beta h_2^2 - \gamma h_1 h_2$ où α, β et γ sont des réels à expliciter.

(d) On se place dans $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ et on suppose que ϕ est tel que $\langle x|\phi(x) \rangle$ soit strictement positif pour tout x non nul.

(e) Justifier que ϕ est un endomorphisme et donner le signe de ses valeurs propres.

605. (CCP2015)

(a) Montrer que $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que, pour ce produit scalaire, $((X^2 - 1)^n)^{(n)} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

606. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\phi(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $f(M) = A^tMA$, pour A fixée, est un endomorphisme symétrique dont on déterminera les valeurs propres; est-il diagonalisable ?

607. (CCP 2015)

Soient E euclidien et F le sous-espace engendré par la famille (e_1, \dots, e_p) de vecteurs unitaires de E .

Montrer que, si $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p (x|e_i)^2$, alors $F^\perp = \{0\}$ et (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormale de E .

608. (ENSIIE 2015)

Calculer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$.

III. Probabilités

608 bis. (Mines-Ponts 2023 - sans preparation) (Paola)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

608 ter. (Mines-Ponts 2023 - sans preparation) (Martin)

On range n objets dans $n - 1$ tiroirs. Trouver la probabilité qu'aucun tiroir ne soit vide.

609. (Centrale 2024) (James)

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On tire, avec probabilité uniforme, n boules simultanément. On note X la valeur maximale des boules obtenues.

1. Déterminer la loi de X .

2. Démontrer que $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

3. Calculer $E(X)$.

609 bis. (Mines Telecom 2022) (Juliette)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

(a) Rappeler la loi de X et son espérance.

(b) Trouver la loi de V et son espérance.

(c) Que vaut $U + V$? En déduire l'espérance de U .

610. (MinesTel 2024) (Keira)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de (U, V) .

2. Déterminer l'espérance de $U + V$; la variance de $U + V$.

610 bis. (Mines Telecom 2022) (Aboubakar)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires. U_1 contient 75% de boules blanches et U_2 contient 50% de boules blanches. Il y a trois fois plus de boules dans U_1 que dans U_2 .

On transvase le contenu des deux urnes dans une urne U_3 .

On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité que la boule blanche soit issue de U_1 ?

611. (Mines-Ponts 2024 - sans preparation) (James)

Soit une roue tournante sur laquelle sont indiqués les entiers de 1 à 6. Est-il possible de truquer la roue de telle sorte qu'en la tournant deux fois, la somme des nombres obtenus suive une loi uniforme?

611 bis. (Mines-Ponts 2022) (Jean)

On choisit $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, n \geq 2$. Quelle est la probabilité que f soit surjective?

612. (Centrale 2022) (Aboubakar)

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

On effectue n tirages successifs avec remise. On note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules distinctes tirées au bout de k tirages.

- (a) Déterminer $P(X_{k+1} = i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 (b) Calculer $E(X_k)$

613. (CCINP 2022) (Matthieu)

- (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -4 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$

A quelle condition sur x , M possède-t-elle deux valeurs propres distinctes ?

- (b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

On pose $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$

Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes ?

614. (CCINP 2022) (Océane)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n + 2) = 4P(X = n + 1) - P(X = n)$$

Déterminer la loi de X .

615. (CCINP 2022) (Kyledz77)

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right), Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right).$$

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

- (a) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible ?
 (b) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable ?

616. (CCINP 2021) (Grégory)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - \frac{1}{\alpha}$, avec $\alpha > 1$.

- (a) Quelle est la probabilité que X soit pair ?
 (b) Quelle est la probabilité que X soit un multiple de 3 ?

617. (CCINP 2021) (Juliette)

Soit $p \in]0, 1[$. On lance une pièce, avec p la probabilité d'obtenir Face.

Soit N le numéro du lancer auquel on obtient pour la première fois Face.

Trouver la loi de N et son espérance.

618. (CCINP 2021) (Chloé, Armand)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, Y_n = X_n X_{n+1}$.

- (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n .
 (b) Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ? Indication : on pourra calculer leur covariance.

619. (CCINP 2021)

Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant ou non être correcte) avec la probabilité p , ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1 - p$.

On note A_n l'événement "la n -ième personne reçoit correctement l'information initiale", et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis exprimer p_n en fonction de n .

620. (CCINP 2021)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n , telles que, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard, puis l'on choisit, toujours au hasard, une boule dans cette urne.

- (a) Soit N le numéro de l'urne choisie ; donner la loi et l'espérance de N .
 (b) Soit X le numéro de la boule choisie ; donner la loi et l'espérance de X .

621. (CCINP 2021)

(a) Soit Y une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = \frac{5}{3}$

Calculer p_0, p_1, p_2 , où $p_k = P(Y = k)$.

(b) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

On suppose connaître $E(X), E(X^2), \dots, E(X^n)$.

Comment faire pour calculer p_0, p_1, \dots, p_n ?

622. (CCINP 2019)

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (identiquement distribuées), telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, pour n dans \mathbb{N}^* . Soit $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $E(\sin(tX_k))$ et $E(\cos(tX_k))$.
 (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\cos(tS_n)) = (\cos t)^n$.

623. (TPE 2019)

On lance 3600 fois on dé ; montrer que la probabilité que le nombre de 1 soit compris entre 480 et 720 vaut au moins 0.96 .

624. (CCINP 2019)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$.

625. (CCINP 2019)

Au péage d'autoroute, 12 guichets sont ouverts. Les voitures qui se présentent à ce péage se répartissent aléatoirement sur ces guichets, indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de voitures arrivant au péage au cours d'une journée et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note Y le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 12.

- (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

626. (CCINP 2019)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi qui admettent une espérance et une variance. On suppose $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. (a) Calculer $E(X-Y)$ et exprimer $V(X-Y)$ en fonction de $V(X)$.

(b) i. Montrer que $P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)^2$.

ii. Calculer $P(X = Y)$ si X et Y suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(c) Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

i. Calculer $P(X = Y)$.

ii. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

(d) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^n .

Montrer que, si $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $P(X = Y) \geq \frac{1}{n}$.

(e) Montrer que $P(X = Y) \geq 1 - 2V(X)$

627. (CCINP 2019, CCP 2017)

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi $G_N(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = pq^k$, avec $q = 1 - p$. On note $X \hookrightarrow G_N(p)$.

(a) Soit $X \hookrightarrow G_N(p)$ et $S = X + 1$. Quelle est la loi suivie par S ? En déduire l'espérance de X .

(b) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $G_N(p)$. On note

$Z = \min(X, Y)$. Montrer que pour tout entier n , on a : $P(X \geq n) = q^n$. En déduire $P(Z \geq n)$. Déterminer la loi de Z et donner son espérance.

(c) On lance une pièce avec une probabilité de faire Pile égale à $p \in]0, 1[$. Pour tout entier i , on note F_i l'événement : « on obtient Face au i -ème lancer ». Soit T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile. Exprimer $(T = k)$ en fonction des F_i . Déterminer la loi et l'espérance de T .

(d) On reprend $X \hookrightarrow G_N(p)$ et $Y \hookrightarrow G_N(p)$ indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = |X - Y|$. Calculer $P(M = k, D = i)$ (on pourra différencier les cas $i = 0$ et $i \geq 1$). En déduire la loi de D .

628. (CCINP 2019)

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Pour $D \in \mathbb{N}, D > 2$, on note A_D l'évènement « X est un multiple de D ». Donner la probabilité de A_D

629. (CCINP 2019)

Une urne contient une boule blanche et une noire ; à chaque tirage, on ajoute une boule de même couleur que celle tirée. On note respectivement B_k et N_k les évènements « on a tiré une boule blanche (noire) au k -ième tirage ».

Quelle est la probabilité de l'évènement « la première boule noire tirée l'est au rang k ?
Quelle est la probabilité qu'on ne tire jamais de boule noire ?

630. (CCINP 2019)

On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note P_n l'évènement « on obtient pile au n -ème lancer » et F_n l'évènement « on obtient face au n -ème lancer ».

On note Y la variable aléatoire donnant le premier rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face), Y étant égale à 0 si cette séquence n'apparaît jamais.

On pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ si $n \geq 3$, puis $U_n = \bigcup_{k=3}^n B_k$ et $u_n = P(U_n)$, avec $u_1 = u_2 = 0$

(a) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

(b) Calculer $P(B_n)$. Montrer que B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles. Calculer u_3, u_4 et u_5 .

(c) Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Exprimer $P(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2} .

- (d) Montrer que : $\forall n \geq 3, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Calculer ℓ .
 (e) Calculer $P(Y = 0)$ et commenter.

631. (Mines Télécom 2019)

Si X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$, que vaut $P(X_1 = X_2 = X_3)$?

632. (CCINP 2019)

X et Y , variables aléatoires indépendantes, suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Donner les lois de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Quelle est la loi conjointe de (U, V) ?

633. (CCINP 2019)

(a) Donner les variations de $\phi(x) = -x \ln(x)$ sur $]0, 1]$ et montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.

(b) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , on pose $p_n = P(X = n) \neq 0$.

Lorsque $\sum \phi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie $H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(p_n)$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$. En déduire que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 0 \leq -\sqrt{p_n} \ln p_n \leq 1$.

(c) Montrer que si X suit une loi géométrique, elle admet une entropie et la calculer.

(d) Dans le cas général, on suppose que X admet une espérance.

Montrer, à l'aide de l'inégalité établie, que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \phi(p_n) \leq \max \left\{ \frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln(n) \right\}$$

(e) Montrer que X admet une entropie.

634. (CCINP 2019)

On donne deux variables aléatoires X et Y , définies sur Ω et telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!2^{j+1}}, a \in \mathbb{R}$.

Déterminer a puis les lois marginales de X et Y .

635. (CCP 2017, CCINP 2019)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois géométriques de paramètre p_1 et p_2 .

Soit $Z = \min(X, Y)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Z > n)$.

(b) Déterminer la loi de Z .

636. (Mines Télécom 2019)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E} \left(\frac{1}{X+1} \right)$.

637. (Mines Télécom 2019)

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r.d. telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $np_n \rightarrow \lambda$ où $\lambda > 0$.

(a) Donner $P(X_n = k)$ pour $k, n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la limite de $P(X_n = k)$ lorsque $n \rightarrow \infty$

638. (Mines Télécom 2019)

(a) Rappeler la loi de Poisson. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance (avec démonstration).

(b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$

Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

639. (CCP 2018)

On note classiquement $j = e^{2i\pi/3}$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $S_k = 1 + j^k + j^{2k}$.

(b) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On note Y le reste de la division euclidienne de X par 3.

Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

640. (Mines Télécom 2018)

Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C . À l'instant $t = 0$, il se trouve en A .

Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité.

On considère que l'eau se régénère après qu'il est parti du point d'eau.

On note :

$a_n = P(\text{"l'animal est en } A \text{ à } t = n\text{"})$

$b_n = P(\text{"l'animal est en } B \text{ à } t = n\text{"})$

$c_n = P(\text{"l'animal est en } C \text{ à } t = n\text{"})$.

(a) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n .

De même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

(b) On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

i. Justifier que A est diagonalisable.

ii. Justifier que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A .

iii. Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

(c) Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n .

641. (Mines Télécom 2018)

Soit 2 urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.

On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.

Soit l'événement : B_n : "tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage" et $P_n = P(B_n)$.

(a) Calculer P_1 .

(b) Calculer P_{n+1} en fonction de P_n .

(c) Calculer P_n en fonction de n .

642. (Mines Télécom 2017)

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 , de même loi $\mathcal{G}(p)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer l'événement $(X_1 - X_2 = n)$ comme réunion disjointe d'événements, de manière à calculer sa probabilité.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'égalité $P(X_1 - X_2 = n) = P(X_2 - X_1 = n)$. En déduire la loi de $X_1 - X_2$.

(c) On suppose que X_1 et X_2 représentent le temps d'attente à deux guichets de gare distincts. Comment interpréter l'événement $(X_1 - X_2 > 0)$?

643. (EIVP 2017)

On donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

(a) Trouver a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

(b) Déterminer α tel que $P(X = k) = \frac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$ et donner la loi de X .

(c) X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, la (les) calculer.

644. (EIVP 2017)

Sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , un système complet d'événements $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ vérifie $P(A_1) = \frac{1}{2n}$ et $(P(A_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est arithmétique.

(a) Déterminer $P(A_i)$, $1 \leq i \leq n$.

(b) Déterminer $P(B)$ où B est un événement tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(B | A_i) = \frac{i}{2n}$.

645. (CCP 2017)

Une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \leq \varepsilon\right) = 0$.

646. (Mines Télécom 2017)

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) de telle sorte que la somme suive une loi uniforme ? Indication : On pourra utiliser les fonctions génératrices

647. (TPE-EIVP 2016) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire sans remise une à une les boules. On note X_i la variable égale à 1 si la i -ème boule tirée porte le numéro i et 0 sinon.

(a) Donner la loi de X_i .

(b) Lorsque l'on vide entièrement l'urne, combien de fois peut-on espérer que le numéro d'une boule ait coïncidé avec son rang dans le tirage ?

648. (CCP 2016) /commentaireTB

Soit p variables aléatoires X_1, \dots, X_p admettant une variance.

On note $\Gamma = (\text{cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$ la matrice des covariances.

On cherche $c = (c_1, \dots, c_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ non nul, tel que $\frac{1}{\|c\|^2} V \left(\sum_{i=1}^p c_i X_i \right)$ soit maximal (pour avoir un échantillon le plus varié possible). (a) Montrer que $\forall c \in (\mathbb{R}_+)^p, V \left(\sum_{i=1}^p c_i X_i \right) =$

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2} c_i c_j \text{cov}(X_i, X_j).$$

(b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+$, est diagonalisable et trouver une base de ses vecteurs propres.

(c) Montrer que Γ est diagonalisable.

(d) Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ les valeurs propres de Γ énoncées dans l'ordre décroissant un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. On note C le vecteur colonne $C = {}^t c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_p \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^t C \Gamma C = V \left(\sum_{i=1}^p c_i X_i \right)$ et en déduire que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$

(e) Montrer que $\frac{1}{\|c\|^2} V \left(\sum_{i=1}^p c_i X_i \right) \leq \lambda_1$ (on pourra se placer dans une base de vecteurs propres de Γ).

(f) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si c est un vecteur propre associé à λ_1 .

(g) Application : $p = 3, \rho \in [0, 1], X_1, X_2, X_3$ trois variables aléatoires de variances respectives V_1, V_2, V_3 telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, i \neq j, \text{cov}(X_i, X_j) = \rho$; on pose $Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{V_i}}$ et $\Lambda = (\text{cov}(Y_i, Y_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2}$.

Trouver les valeurs propres de Λ et c tel que $\frac{1}{\|c\|^2} V \left(\sum_{i=1}^p c_i X_i \right)$ soit maximal.

649. (EIVP 2016)

On donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes X_k telles que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_k)$

Donner les lois de $Y = \prod_{k=1}^n X_k, W = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_k$ et $Z = \max_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} (|X_{k+1} - X_k|)$.

650. (CCP 2016)

On dispose de deux urnes U_1, U_2 , pouvant être vides, et de deux jetons. On choisit aléatoirement l'une des deux urnes et on en tire un jeton (si elle est vide, on passe à l'autre), puis on replace le jeton aléatoirement dans l'une des deux. On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans U_1 au bout du n -ième tirage.

On note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 0) \\ P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec $p + q + r = 1$,
 $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

(a) Donner une base du noyau de A et en déduire une valeur propre.

(b) Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes $a < b < c$ et qu'elle est diagonalisable. Trouver un vecteur propre associé à c .

(c) On admet que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à b ; donner une matrice P dont la

première ligne ne comporte que des 1 et telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(d) On pose $a_{i+1,j+1} = P_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$ pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$ et A la matrice de coefficients $a_{i+1,j+1}$; montrer que $AU_n = U_{n+1}$ et en déduire la loi de X_n .

(e) Justifier que (U_n) admet une limite $\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Reconnaître la variable aléatoire X telle que $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(X = k) = l_k$.

651. (Mines Télécom 2016)

Soit N le nombre de visiteurs d'un parc par jour. N suit une loi de Poisson de paramètre 4000. Le parc possède 4 entrées et chaque visiteur se dirige vers une entrée indépendamment des autres visiteurs. Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes empruntant l'entrée 1 chaque jour.

(a) Donner le nombre moyen de visiteurs empruntant les entrées du parc chaque jour.

(b) Donner la loi de probabilité de X .

652. (Mines Télécom 2016, Mines Télécom 2017, EIVP 2017)

X est une variable aléatoire sur un univers Ω vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

et $\exists k \in]0, 1[, P(X = n) = kP(X \geq n)$.

Déterminer la loi de X .

653. (TPE-EIVP 2015) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la probabilité de tirer l'entier n comme étant égale à $\frac{1}{2^n}$.

(a) Montrer qu'on a ainsi bien défini une probabilité

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'évènement "L'entier n tiré est un multiple de k ". Exprimer $P(A_k)$ en fonction de k .

(c) Calculer $P(A_2 \cup A_3)$

(d) On note B l'évènement "L'entier n tiré est un nombre premier".

Montrer que $\frac{13}{32} < P(B) < \frac{209}{504}$

654. (Mines Télécom 2015)

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment de X . On définit $Z = X + Y$.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z .

655. (Télécom SudParis 2015)

Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson. Comparer les probabilités des événements (X prend une valeur paire) et (X prend une valeur impaire).

656. (Mines Télécom 2015)

On définit des variables aléatoires discrètes Y_i , indépendantes, de même loi, et possédant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

(a) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout $\alpha > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(Y_1)}{n\alpha^2}.$$

(b) On tire avec remise une boule parmi 2 rouges et 3 noires. Quand a-t-on 95% au moins de chances d'avoir une proportion de boules rouges qui est comprise entre 0.35 et 0.45?

657. (CCP 2015)

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p .

Trouver la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{P(X > n)}{P(X = n)}$.

658. (CCP 2015)

(a) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ peut-elle être inversible? A quelle(s) condition(s) sur x et y représente-t-elle un projecteur non nul?

(b) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi binomiale de paramètres n et p .

i. Quelle est la probabilité que $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) \end{pmatrix}$ soit inversible?

ii. Quelle est la probabilité que ce soit un projecteur non nul?

659. (ENSEA 2015)

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Déterminer la loi de Y_i , $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

660. (CCP 2015, CCP 2017)

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ ; une variable aléatoire Y suit, sachant $(X = n)$, une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Déterminer la loi conjointe, puis celle de Y .

661. (CCP 2015)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ; on tire successivement deux boules avec remise et on note X le plus grand des numéros qu'elles portent, Y le plus petit.

Donner les lois de (X, Y) , de X et de Y .

662. (TPE-EIVP 2015)

Pour une variable aléatoire X , à valeurs dans \mathbb{N} , on note $P_n = P(X = n)$, $R_n = P(X > n)$, G sa fonction génératrice.

(a) Trouver la relation entre la suite (R_n) et la série de terme général P_n .

(b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum R_n t^n$ est au moins égal à 1.

(c) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k t^k = \frac{1 - G(t)}{1 - t}$.

663. (Navale 2015) Une famille a n enfants; les événements d'avoir une fille ou un garçon sont équiprobables.

(a) On note A : la famille a au moins un enfant de chaque sexe et B : la famille a au plus une fille. Calculer les probabilités de A et B pour $n \geq 2$.

(b) Montrer que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

664. (Mines Télécom 2015)

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge ; à chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet accompagnée de deux autres boules de la même couleur.

- (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?
- (b) Le résultat est-il le même si on ajoute trois boules au lieu de deux ?

665. (Mines Télécom 2015)

La probabilité d'obtenir pile avec une pièce truquée est de 0,3

- (a) Calculer la probabilité d'obtenir 3 piles en 10 lancers.
- (b) Calculer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir une première fois pile.

666. (Mines Télécom 2015)

Un joueur lance une pièce truquée, la probabilité qu'il obtienne pile est $p \in]0, 1[$; il gagne dès qu'il obtient deux piles de plus que de faces, il perd dès qu'il a deux faces de plus que de piles.

- (a) Quelle est la probabilité que la partie dure plus de $2n$ coups ?
- (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

667. (Mines Télécom 2015)

Deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

- (a) Déterminer la loi de $X + Y$, en déduire son espérance et sa variance.
- (b) On suppose X et Y définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) ; Y suit une loi de poisson de paramètre μ , $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et la loi conditionnelle de X , sachant que $P(Y = n)$ est une loi binomiale de paramètre (n, p) . Déterminer la loi de X .

668. (Mines Télécom 2015)

On dispose d'une boîte verte contenant deux jetons numérotés 0 et d'une boîte rouge contenant deux jetons numérotés 1. On tire un jeton dans chaque boîte et on les échange de boîte. On note X_n la variable aléatoire qui a pour valeur la somme des valeurs des jetons de la boîte verte après n échanges.

Trouver la loi de X_n (on pourra introduire $V_n = \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et une matrice A telle que $V_n = A^n V_0$.)

669. (Mines-Télécom)

On désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies de \mathbb{N} dans $\{0, 1\}$.

$$X_0 = 1$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0, 2.$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0, 4.$$

On pose $x_n = P(X_n = 1)$.

- (a) Déterminer x_1 et x_2 .
- (b) Déterminer une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n .
- (c) Déterminer x_n en fonction de n .

670. (Mines-Télécom)

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , de loi conjointe

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P(X = j, Y = k) = a \frac{j+k}{2^{j+k}}.$$

- (a) Trouver les lois marginales de X et de Y .
- (b) Déterminer a .
- (c) X et Y sont-elles indépendantes ?
- (d) Calculer $P(X = Y)$.

IV. Centrale 2 (avec préparation et Python)

670 bis. (Centrale 2 2024) (James)

Soit la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \text{Arctan}(x_i)$.

Elle est définie sur $\mathcal{D} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et } \forall i \in [1, n], x_i \geq 0 \right\}$

- (a) Tableau de variation de Arctan.
- (b) Tracer $h : x \rightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1 - x)$
- (c) Grâce au tracé donner max et min de $f : x$ dans le cas $n = 2$, en déduire une conjecture sur les maximums et minimums dans le cas général
- (d) Justifier formellement ces maximums et minimums dans le cas $n = 2$.
- (e) Justifier que f admet des maximums et minimums dans le cas général.

(`trace_3D(f)` est une fonction d'un package qu'ils on demandé d'importer qui permet de tracer f dans le domaine en question pour $n = 3$: il faut simplement l'appeler (on obtiens un figure en 3D et on voit que $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$ est le maximum et que les minimums sont atteint dès que deux composantes $x_i = 0$ donc dès que une composante $x_i = 1$))

- (f) Evaluer les éventuelles points critiques de $\bar{f} : (x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)$
- (g) Avec le package `random` crée $N = 10000$ vecteurs X_i qu'on normalise par une constante bien choisi pour être des éléments D : évaluer $\max(f)_{X_i}$ numériquement pour comparer avec la valeur théorique, puis regarder $\frac{M}{\pi - \text{Arctan}(X)}$
- (h) (...)

671. (Centrale 2 2022) (Jean)

Soit Y une variable aléatoire admettant une espérance $S = E(Y) \leq 1$, telle que $P(Y = 0) \neq 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On note F la fonction génératrice de Y .

(a) Montrer que F est \mathcal{C}^0 sur $[-1, 1]$ puis que F' est croissante sur $[0, 1]$.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = F(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1]$.

(c) ?

(d) On considère que $F(t) = \exp(\mu(t - 1)), \mu > 0$.

i. Coder `U(mu, n)` renvoyant u_n .

ii. Afficher les 30 premiers u_n pour $\mu = 0,7$ et $\mu = 1$. Conjecturer sur la monotonie de (u_n) .

iii. Si $F(t) = e^{\mu(t-1)}$, quelle loi suit Y ?

(e) On pose $\varphi(t) = F(t) - t$.

Etudier le signe de φ dans le cas général.

(f) Valider la conjecture sur la monotonie et la limite de (u_n) .

(g) Maintenant $S < 1 \dots$

672. (Centrale 2 2022) (Aboubakar)

$$\text{Soit } K : (x, y) \mapsto \begin{cases} \sin x \cos y & \text{si } x \geq y \\ \cos x \sin y & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $C = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

(a) - Montrer que U est un ouvert.

Montrer que $K \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

(b) Soit $\alpha : (x, y) \mapsto \min(x, y)$ et $\beta : (x, y) \mapsto \max(x, y)$.

On admet que α et β sont continues.

En exprimant K en fonction de $\alpha(x, y)$, montrer que K est continue sur \mathbb{R}^2 .

(c) Ecrire une fonction $K(x, y)$ qui renvoie la surface vectorielle de K .

(d) Tracer $K(x, y)$ sur C .

(e) Conjecturer le minimum et le maximum de K sur C .

(f) Dire pourquoi K admet un minimum et un maximum sur C et démontrer la conjecture précédente.

(g) Justifier l'existence de dérivées partielles de K en tout point de \mathbb{R}^2 .

(h) Ecrire une fonction $dO(f)$ qui rend la valeur de $\int_0^{\pi/2} f(t) \cos(t) dt$

(i) On pose $L : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^{\pi/2} f(t) K(x, t) dt\right)$.

Montrer que L est un endomorphisme.

(j) L est-il surjectif? injectif?

(k) Résolution d'équadiff non linéaire avec odeint

673. (Centrale 2019)

On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1) \cdots (t-n+1) dt \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

(1) Montrer que la suite (a_n) est bien définie. Préciser le signe de a_n .

(2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(3) PYTHON.

a) Afficher les 100 premières valeurs de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Afficher les 1000 premières valeurs de $(n(\ln n)^2 a_n)_{n \geq 1}$.

c) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

d) Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut 1.

e) i) Donner le DSE de $u \mapsto (1+u)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

f) Trouver une relation de récurrence entre les termes de la suite (a_n) . En déduire une nouvelle façon d'implémenter le calcul de a_n .

g) Étudier la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} a_n$.

674. (Centrale 2019 RMS)

On utilise `numpy`, `matplotlib.pyplot`, `random` provenant de la bibliothèque Python. Un mobile se déplace sur \mathbb{Z}^2 . Les déplacements selon l'axe des x et l'axe des y sont indépendants et suivent la même loi : $\mathbb{P}(\delta_x = 1) = \mathbb{P}(\delta_x = -1) = \frac{1}{2}$. On note (x_n, y_n) la position du mobile à l'instant n , avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$. On note U_n le nombre de retours à l'origine entre l'instant 0 et l'instant $2n$.

(a) Que dire de $\mathbb{P}(x_{2k+1} = 0)$ et de $\mathbb{P}(y_{2k+1} = 0)$?

(b) Sachant que $\mathbb{P}(x_{2k} = 0) = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$, donner $\mathbb{P}(y_{2k} = 0)$ et $\mathbb{E}(U_n)$.

(c) Donner la loi de $\frac{\delta_x + 1}{2}$.

(d) Donner une fonction `simu(n)` qui, prenant un entier n en argument, renvoie la valeur de (x, y) après n pas. Tracer une simulation du mouvement pour $n = 1000$.

(e) Donner une fonction `retour(n)` qui renvoie un tableau donnant le nombre de retours à l'origine pour $k = 0, 2, \dots, 2n$.

(f) Donner un équivalent de a_n et de $\mathbb{E}(U_n)$. On utilisera le résultat suivant : si $v_n \sim w_n$, si $v_n \geq 0$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^n v_k \sim \sum_{k=0}^n w_k$

675. (Centrale 2019 RMS)

(a) Montrer qu'étant donnée une famille libre (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de \mathbb{R}^n , il existe une base orthonormée \mathcal{B} telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (c'est-à-dire appartient à $T_n^+(\mathbb{R})$)

(b) Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

(c) Coder en Python le procédé de Gram-Schmidt dans \mathbb{R}^n . Vérifier le programme.

(d) Coder en Python la décomposition QR définie en 2).

(e) Déterminer $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$. En déduire l'unicité de la décomposition QR .

676. (Centrale 2019 RMS)

Algorithme de Fadeev.

Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ par $A_1 = A$ et la relation de récurrence $A_{k+1} = A \left(A_k - \frac{\text{tr} A_k}{k} I_p \right)$. On note aussi $X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} X^k$ le polynôme caractéristique de A .

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Écrire en Python une fonction renvoyant A_k et $\alpha_k = -\frac{\text{tr} A_k}{k}$. Calculer χ_A sans Python et énoncer une conjecture.

- (b) Soit $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} X^k = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (les λ_i ne sont pas nécessairement distincts). Montrer que $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{X - \lambda_i}$. En déduire un développement en série entière autour de 0 de $x \mapsto \frac{P'(\frac{1}{x})}{P(\frac{1}{x})}$.
- (c) Avec les notations du 2), donner une expression de S_n en fonction des S_k précédents et des a_k , lorsque $S_n = \text{tr } A^n$.
- (d) Montrer la conjecture faite dans la question 1).

677. (Centrale 2019 RMS)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad P_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad A_n = D(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} 1 + X_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + X_2 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + X_n \end{vmatrix}$$

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n et de P_n .
- (b) Déterminer la loi de P_n . Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?
- (c) Coder une fonction qui étant donné un vecteur $[x_1, \dots, x_n]$ renvoie la liste composée de $1 + \sum_{i=1}^n x_i$, $\prod_{i=1}^n x_i$ et $D(x_1, \dots, x_n)$.
- (d) Effectuer plusieurs simulations avec $n = 10$. Conjecture ? La prouver.
- (e) Tracer pour dix simulations la suite $(A_n/n)_{1 \leq n \leq 200}$.
- (f) Déterminer l'espérance et la variance de A_n .
- (g) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|A_n| > \varepsilon n) = 0$.

678. (Centrale 2019 RMS)

On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations ayant exactement k points fixes. On considère une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n , et X_n le nombre de ses points fixes. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

- (a) Calculer $\sum_{k=0}^n D_{n,k}$
- (b) Exprimer $D_{n,k}$ en fonction de $D_{n-k,0}$.
- (c) Écrire un algorithme renvoyant le nombre de points fixes d'une permutation σ , puis un algorithme renvoyant p_n .
- (d) Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
- (e) En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.