Exercice 1 *Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss*

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.
   • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
   Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. • L'application $(.|.)$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   • Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,
   $$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt = (Q|P),$$
   donc $(.|.)$ est symétrique.
   • Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt\end{aligned}$$
   (par linéarité de l'intégrale convergente)
   $$= \lambda(P|R) + (Q|R),$$
   donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.
   • $(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
   • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geqslant 0$.
   D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et "$+\infty > 0$"), on a :
   $$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0.$$
   $(.|.)$ est donc positif.
   • Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$.
   Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, "$0 < +\infty$" et $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, et donc $P^2(t) = 0$, puis $P(t) = 0$.
   Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P = 0$.
   $(.|.)$ est donc bien défini.
   • $(.|.)$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Posons $u(t) = t^k$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
   $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
   Enfin, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ sont convergentes.
   On peut donc intégrer par parties et on a :
   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$
4. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$ (HR_k)
   Initialisation : Pour $k=0$, $(X^0|1) = (1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (cours), donc on a bien HR_0.
   Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
   Alors, d'après la question précédente, comme $k+1 \in [\![1,n]\!]$, on a
   $$(X^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (k+1)(X^k|1) \underset{HR_k}{=} (k+1)k! = (k+1)!.$$
   On a bien HR_{k+1}.
   Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

5. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un polynôme.
   De plus, comme $\deg(P') \leqslant \deg(P) - 1 \leqslant n-1$ et $\deg(P'') \leqslant n-2$, on a
   $$\deg(\alpha(P)) \leqslant \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leqslant \max(1+n-2, 1+n-1) \leqslant n,$$

donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
• De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda X P'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' \\ &= \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q),\end{aligned}$$

donc α est une application linéaire.
• α est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On a $\alpha(1) = X(1)'' + (1-X)(1)' = 0$, $\alpha(X) = X(X)'' + (1-X)(X)' = 1 - X$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

Rq : On remarque que cette formule est encore valable pour $k = 1$, donc on a,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1} \quad \textit{et} \quad \alpha(1) = 0.}$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7. Comme $Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)$ est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}\left(Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)\right) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}.$$

II. Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.
$-k$ est donc valeur propre simple de α, donc $\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.

9. • Soit (Q_k) une base de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$.
Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
Alors $P_k = \frac{1}{a}Q_k$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
De plus, $P_k = \frac{1}{a}Q_k \in \mathrm{Vect}(Q_k) = \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc

$$(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$

Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
• Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Alors $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(Q_k) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{a}Q_k\right) = \mathrm{Vect}(P_k)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$.
De plus, les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant (1), donc $\lambda = 1$, et, par suite, $R_k = P_k$. On a donc bien l'unicité.
• Il existe donc bien un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10. Soit d le degré de P_k, avec $d \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.
Il existe donc $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^d a_iX^i$ (et $a_d = 1$).
Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^d a_i\alpha(X^i) \quad \text{(par linéarité de } \alpha\text{)} \\ &= 0 + \sum_{i=1}^d a_i\left(-iX^i + i^2X^{i-1}\right) \quad \text{(d'après la question 6)} \\ &= \sum_{i=1}^d -ia_iX^i + \sum_{i=0}^d a_ii^2X^{i-1}.\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ (car $P_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-da_d = -ka_d \underset{a_d=1}{\Leftrightarrow} -d = -k \Leftrightarrow d = k,$$

donc P_k est de degré k.

11. • On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.
• On a $\alpha(X) = -X + 1$, donc $\alpha(X-1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X-1)$, et le coefficient dominant de $X - 1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.

• Le coefficient dominant de X^2-4X+2 est 1 et

$$\begin{aligned}\alpha(X^2-4X+2) &= \alpha(X^2)-4\alpha(X)+2\alpha(1)\\ &= -2X^2+4X-4(-X+1)+0\\ &= -2X^2+8X-4=-2(X^2-4X+2),\end{aligned}$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2-4X+2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0,\dots,P_n)$

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$.

12. • Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty}(tP''(t)+(1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t}-\int_0^{+\infty}tP'(t)Q(t)e^{-t}dt,\end{aligned}$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 1.
• Posons $u'(t)=tP''(t)+P'(t)$, $u(t)=tP'(t)$, $v(t)=Q(t)e^{-t}$, $v'(t)=Q'(t)e^{-t}-Q(t)e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$u(t)v(t)=tP'(t)Q(t)e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées.
Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 1).
On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t}dt &= \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty}\\ &\quad -\int_0^{+\infty}tP'(t)(Q'(t)e^{-t}-Q(t)e^{-t})dt\\ &= -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt\\ &\quad +\int_0^{+\infty}tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t}-\int_0^{+\infty}tP'(t)Q(t)e^{-t}dt\\ &= -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

13. Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty}tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty}tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

14. • Pour tout $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}&(\alpha(P_i)|P_j) = (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j)\\ \text{et}\quad &(\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j),\end{aligned}$$

donc, d'après la question 13, $-i(P_i|P_j)=-j(P_i|P_j)$, donc $(i-j)(P_i|P_j)=0$, donc, si $i\neq j$, on a $(P_i|P_j)=0$.
La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est donc orthogonale.
• De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.
Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
• La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est donc bien une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

15. Remarquons déjà que, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=(1|X^k)=k!$ d'après la question 4.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si un n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, en posant $P(X)=X^k\in\mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir

$$\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^k,\quad\text{ie}\quad k!=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ x_1&x_2&\cdots&x_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ 1!\\ \vdots\\ (n-1)!\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifie

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ 1!\\ \vdots\\ (n-1)!\end{pmatrix},$$

alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.
D'où, pour tout polynôme $P=\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k\\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité)}\\ &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.

16. La matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.
Le système $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ 1!\\ \vdots\\ (n-1)!\end{pmatrix}$ est donc de Cramer, donc il admet un unique n-uplet solution. D'où l'unicité de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifiant $(*)$.

17. • Soit $P=P_n^2$. Alors $\deg(P)=2\deg(P_n)=2n$, donc $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$.
• De plus, $t\mapsto P(t)e^{-t}=P_n^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (car P_n, non nul, n'a pas une infinité de racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale ("$0<+\infty$"), $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt>0$.
• Enfin, comme x_i est racine de P_n pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, x_i est aussi racine de $P=P_n^2$, donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)=\sum_{i=1}^n 0=0$, donc on a bien

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A.1) $f(t)=t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x>0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}=0$, $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ existe pour tout x.
Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D}=]0,+\infty[$.

I.A.2) On intègre par parties pour $x>0$: $\Gamma(x+1)=[-e^{-t}t^x]_0^{+\infty}+x\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n\geqslant 1$ et $x>0$: $\Gamma(x+n)=\Gamma(x)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

Pour $x=1$ on obtient avec $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$, $\Gamma(n+1)=n!$ donc $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour $n\geqslant 1$.

I.A.3) Dans la première intégrale on pose $t=u^{1/2}$ (bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ dans lui-même) :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{2}u^{-1/2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\Gamma(3/2).$
Dans la seconde intégrale on pose $t=u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ dans lui-même) :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\Gamma(1/4)=\Gamma(5/4).$

I.B.1) Pour $t>0$ fixé et x variant entre a et b, $e^{x\ln t}$ est compris entre $e^{a\ln t}$ et $e^{b\ln t}$ donc $t^x\leqslant\max(t^a,t^b)\leqslant t^a+t^b$.

I.B.2) Pour $x>0$ et $t>0$ posons $f(x,t)=t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{(x-1)\ln t-t}$. On calcule $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Pour $x>0$ fixé : $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}(\ln t)^k\mathrm{e}^{-t}=0$.

D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2}\dfrac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0,1]$ puisque $x>0$. On en déduit que $t\mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

— Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$

— Pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

— Pour tout $x\in]0,+\infty[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $t\mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$

— Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$ il existe φ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle $\left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$: en appliquant le I.B.1 on peut prendre $\varphi(t)=\left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(a,t)\right|+\left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(b,t)\right|$.

On en conclut pour $x>0$: $\Gamma^{(k)}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

I.C.1) Puisque $(\ln t)^2>0$ pour $t\neq 1$, on a $\Gamma''(x)>0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Avec $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1,2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1)=\Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1,2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi)=0$ et sa partie entière est égale à 1.

I.C.2) Pour $0<x<\xi$, $\Gamma'(x)<0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x>\xi$, $\Gamma'(x)>0$ donc Γ est strictement croissante.

De $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1)=1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x)\sim\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+.

Puisque Γ est croissante pour $x>2$ et que $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

De $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\dfrac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+.

Pour $x>\xi$ on a $\Gamma'(x)>0$ et par suite $\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)>\Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La courbe représentative de Γ a pour asymptote la droite d'équation $x=0$. Quand x tend vers $+\infty$ la croissance vers $+\infty$ est très rapide puisque $n!$ croît très vite vers $+\infty$.

II Une transformée de Fourier

II.A Pour $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$ posons $g(x,t)=\mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$. On calcule $\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t)=(it)^k\mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$.

Pour x fixé et $k\in\mathbb{N}$, $t\mapsto\left|\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t)\right|=\mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $\Gamma(k+1/4)$ existe.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral en dominant la dérivée k-ième par $\varphi(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$. F est donc de classe C^∞ et $F^{(k)}(x)=i^k\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t$.

$F(0)=\Gamma(1/4)$.

II.B.1) En utilisant le développement en série entière de e^{itx} on obtient : $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t)=\mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\dfrac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé) :

— f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $|f_n(t)|=\dfrac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.

— La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t>0$.

— Si on choisit $|x|<1$, la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

En effet, $u_n=\dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}\mathrm{d}t=\dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1/4)$. Pour $n\geqslant 2$, par croissance de la fonction Γ, on obtient $u_n\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1)=|x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme : $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n + 1/4)$.

Avec le résultat du I.A.2) on déduit : $c_n = c_0 \prod_{k=0}^{n-1} (k + 1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

La croissance de la fonction Γ pour $x \geqslant n > 2$ entraîne que $\Gamma(n)\frac{|x|^n}{n!} \leqslant \left|c_n \frac{(ix)^n}{n!}\right| \leqslant \Gamma(n+1)\frac{|x|^n}{n!}$ et par suite $\frac{|x|^n}{n} \leqslant \left|c_n \frac{(ix)^n}{n!}\right| \leqslant |x|^n$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

II.B.2) L'inégalité que l'on vient de montrer entraîne qu'il n'y a pas convergence absolue pour $|x| = 1$ puisque la série $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

II.B.3) Le développement en série entière de $F(x)$ donne son développement limité en 0 à l'ordre 3 :
$F(x) = c_0 + c_1 ix + c_2(\frac{-x^2}{2}) + c_3(\frac{-ix^3}{6}) + \mathrm{o}(x^3)$.
On en déduit avec $c_1 = \frac{1}{4}c_0$, $c_2 = \frac{5}{16}c_0$ et $c_3 = \frac{45}{64}c_0$:
$R(x) = c_0(1 - \frac{5}{32}x^2) + \mathrm{o}(x^3)$ et $I(x) = c_0(\frac{x}{4} - \frac{15}{128}x^3) + \mathrm{o}(x^4)$ (on obtient l'ordre 4 pour $I(x)$ puisque c'est une fonction impaire).

II.C.1) Intégrons par parties : $F'(x) = i\int_0^{+\infty} t^{1/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = \left[it^{1/4}\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{(ix-1)}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)}\int_0^{+\infty} t^{-3/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = -\frac{i}{4(ix-1)}F(x)$ puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien $F' + AF = 0$ en posant $A(x) = \frac{i}{4(ix-1)} = \frac{1}{4(x+i)}$.

II.C.2) On obtient $A(x) = \frac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x) = \frac{1}{8}\ln(1+x^2) - \frac{i}{4}\mathrm{Arctan}x$.
On en déduit que $(F\mathrm{e}^G)' = (F' + FG')\mathrm{e}^G = 0$ d'où $F(x) = Ce^{-G(x)}$ avec $C = F(0) = \Gamma(1/4)$.
On obtient donc $F(x) = \Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8}\mathrm{e}^{\frac{i}{4}\mathrm{Arctan}x}$.

III Autour de la loi de Poisson

III.A.1) $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

III.A.2) $\mathrm{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$.
$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.
$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

III.A.3) Puisque X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X + Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

III.B.1) On montre par récurrence que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.
C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.
Supposons, pour un entier n, que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. $S_n = X_1 + ... + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc le III.A.3) montre que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda + \lambda) = \mathcal{P}((n+1)\lambda)$.
Le résultat est donc vrai pour tout $n \geqslant 1$.

III.B.2) $\mathrm{E}(S_n) = n\lambda$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n\lambda}$.
$\mathrm{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}(n\lambda - n\lambda) = 0$.
$\sigma(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sigma(S_n - \lambda) = 1$.

III.B.3) Puisque T_n possède une variance on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$\mathrm{P}(|T_n - \mathrm{E}(T_n)| \geqslant c) \leqslant \frac{\mathrm{V}(T_n)}{c^2}$ donc $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c^2}$. En choisissant $c \geqslant c(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on obtient $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3 *Étude de séries de pile ou de face*

Partie I - Étude de la longueur de la première série

1. D'après le cours, la série entière $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ a $\boxed{\text{un rayon de convergence égal à 1}}$ et a pour somme la fonction $\boxed{x \mapsto \frac{1}{1-x}}$.

2. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1, 1[$. La série de terme général kx^{k-1}, $k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x

et en constatant que le terme d'indice $k = 0$ est nul, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{k \geqslant 0} kx^k \text{ converge et qu'on a } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}) \,.$$

Par indépendance des lancers, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = k) &= \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}}$.

5. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La série de terme général $\mathbb{P}(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $\mathbb{P}(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1,1[$ donc, d'après la question 14, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \,.$$

On a ainsi $\boxed{\mathbb{P}(L_1 = 0) = 0}$.

6. D'après la question 17, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\mathbb{P}(L_1 = k) = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15, la série $\sum_{k \geqslant 0} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. En particulier, la série de terme général $k\mathbb{P}(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2, ce qui signifie que $\boxed{L_1 \text{ admet une espérance égale à } 2}$.
Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

7. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1.
La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 = 1) &= \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(incompatibilité)} \\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \qquad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

On a donc nécessairement $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
En conclusion, $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1;2\}}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat). $\boxed{\text{La variable aléatoire } N_n \text{ prend donc ses valeurs dans l'ensemble } [\![1,n]\!]}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1,n+1]\!]$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}.$$

Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)\mathbb{P}(P_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)}.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) \quad \text{(question 22)} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \quad \text{(incompatibilité)}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)}$.

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 23, on a

$$\begin{aligned}G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k)x^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)\right) x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k .\end{aligned}$$

Or, on a $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)x^k = G_n(x)$.
Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^{j+1} = x\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$

car $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$. On en conclut qu'on a

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}xG_n(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x)}.$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme définissant G_n étant finie, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, $\boxed{N_n \text{ admet une espérance égale à } G_n'(1)}$.
Soit un entier $n \geqslant 2$. D'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n'(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x.(n-1).\frac{1}{2}.\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$$

donc, en particulier, on a $G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Lorsque $n = 1$, on a $G_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $G_1'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{E(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
La fonction G_n est polynomiale sur $\mathbb{R}$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)x^k .$$

Par ailleurs, d'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}G_n(x) &= x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}} x^k .\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],}$ $\boxed{\text{on a } \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}}$. Cela détermine la loi de N_n.