

Devoir surveillé de Mathématiques n° 6

Samedi 29 mars

Durée 4 heures

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.

Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 *Concours Commun Polytechnique (CCINP) 2019 PC*
Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k .
11. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

15. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2 D'après Centrale 1 PC 2016

Autour de la fonction Gamma d'Euler

1 Fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1.
 - (a) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?
 - (b) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x , n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geq 1$.
 - (c) Montrer l'existence des deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt$ et les exprimer à l'aide de Γ .
2.
 - (a) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$,

$$t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$$
 - (b) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k -ième de Γ au point x , sous forme d'une intégrale.
3.
 - (a) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.
 - (b) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ .

2 Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-3/4} e^{itx} dt$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Montrer que la fonction $F : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{matrix}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k -ième de F en x . Préciser $F(0)$.

2.

- (a) Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!} \quad (\text{S})$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0 . Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (??) ?

- (b) On admet que $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}$.

Etudier si la série du second membre de (??) converge absolument lorsque $|x| = R$.

- (c) Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.

Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

3.

- (a) Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

- (b) En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{i}{4} \text{Arctan} x$.

3 Autour de la loi de Poisson

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, $P(X \in A)$ désigne la probabilité de l'événement $X^{-1}(A)$.

On note $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) t^k$ (série génératrice de la variable aléatoire X).

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- (a) Déterminer $G_X(t)$.

- (b) Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type de X .

- (c) Soit μ un réel strictement positif. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ et telle que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, quels que soient les entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et les intervalles $I_1, I_2, \dots, I_k$ de $\mathbb{R}$

$$P(X_{i_1} \in I_1, X_{i_2} \in I_2, \dots, X_{i_k} \in I_k) = \prod_{j=1}^k P(X_{i_j} \in I_j)$$

- (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type des variables aléatoires S_n et $T_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

- (c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon)$ tel que, si $c \geq c(\varepsilon)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon$.

Exercice 3 D'après CCINP 2022 Filière PC

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\textbf{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

$$\textbf{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}}.$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

3. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k.$$

4. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.
6. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.
7. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_1 = 0)$.
8. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

9. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .
10. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

11. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n).$$

12. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(N_m = k) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

13. Dédurre de ?? que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

14. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
15. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .
16. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .