Probleme 1 *La fonction* $\ln(\Gamma)$

Q1. Soit $x \in]0,+\infty[$. On utilise $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + \mathcal{O}(u^2)$:

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} x\left[\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \left[\frac{x}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (fonction polynômiale de degré 1) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Et $x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, (ln étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Pour tout $x>0$,

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1+x/n-x/n}{n+x} = \frac{x/n}{n+x} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

On pose $\varepsilon_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_n$ est absolument convergente car $|\varepsilon_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ terme général d'une série convergente car $\sum 1/n^2$ est convergente.

Q3. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0,+\infty[$. On a par l'inégalité triangulaire,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[a,b],\ |u_n'(x)| \leqslant \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n| \leqslant \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Donc par passage à la borne supérieure pour $x\in[a,b]$,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{b}{n(n+a)}$ est convergente car $\frac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum|\varepsilon_n|$ converge d'après la question précédente.

Donc par majoration la série $\sum_{n\geqslant 1}\|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente ; d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur $[a,b]$.

Q4. On vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par le *théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions* :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (Q15)
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$;
- la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement (Q16) donc uniformément sur tout segment $[a,b]$ de $]0,+\infty[$

Donc l'application $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'$.

Donc par somme d'applications $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}\right]$$

▷ *Croissance de* φ'. Soit $(x,y)\in]0,+\infty[$, tel que $x\leqslant y$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+x}\geqslant\frac{1}{n+y}$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+x}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+y}$ donc en sommant ces inégalités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+x}\right] \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+y}\right]$$

et $\frac{-1}{x}\leqslant\frac{-1}{y}$, d'où

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+x}\right] \leqslant \frac{-1}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+y}\right] = \varphi'(y)$$

Donc $\boxed{\varphi' \text{ est croissante sur }]0,+\infty[}$.

▷ *Calcul de* $\varphi(x+1)-\varphi(x)$. Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)-\varphi(x) &= -\ln(x+1)+\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n(x+1)-u_n(x))\\ &= \ln(x)-\ln(x+1)+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]}_{=S}\end{aligned}$$

Nous allons voir que $S=\ln(x+1)$ par télescopage. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n+x+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+x}{n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n+1+x}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+x}\right)\\ &= V_{n+1}(x)-V_n(x) \text{ avec } V_n(x)=\ln\left(\frac{n}{n+x}\right)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n(x)=0$ donc par télescopage $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_{n+1}(x)-V_n(x) = 0-V_1(x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)=\ln(1+x)$ donc $S=\ln(x+1)$ puis

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=\ln(x)-\ln(x+1)+S=\ln(x)$$

Remarque : le point clé était de remarquer les télescopages : pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

- $\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(N+1)-\ln(1)=\ln(N+1)$
- $\sum\limits_{n=1}^{N}\left[-\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]=\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)=\ln(x+1)-\ln(N+x+1)$

▷ Enfin, en remarquant que $u_n(1)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\varphi(1)=-\ln(1)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(1)=0$$

Q5. Soit $x>0$. En utilisant les relations $\varphi(x+1)-\varphi(x)=\ln(x)$ et $g(x+1)-g(x)=\ln(x)$, (car g vérifie les conditions C) on a :

$$h(x+1)=\varphi(x+1)-g(x+1)=\ln(x)+\varphi(x)-(\ln(x)+g(x))=\varphi(x)-g(x)=h(x)$$

De plus, φ et g sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc h également et en dérivant l'égalité $h(x+1)=h(x)$, on obtient, $h'(x+1)=h'(x)$.

Q6. On a $h'(x+p)=\varphi'(x+p)-g'(x+p)$.
Par croissance de φ' et g', en sommant les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\varphi'(p)\leqslant & \varphi'(x+p) & \leqslant \varphi'(1+p)\\ -g'(1+p)\leqslant & -g'(x+p) & \leqslant -g'(p)\end{array}\right\} \text{ donc } \varphi'(p)-g'(1+p)\leqslant h'(x+p)\leqslant \varphi'(1+p)-g'(p)$$

De plus, en dérivant la relation $g(t+1)-g(t)=\ln(t)$, on obtient $g'(t+1)-g'(t)=\frac{1}{t}$; par conséquent,

$$\varphi'(p)-g'(1+p)=\varphi'(p)-g'(p)-\frac{1}{p}=h'(p)-\frac{1}{p}$$

et de même, en utilisant $\varphi'(p+1)-\varphi'(p)=\frac{1}{p}$,

$$\varphi'(1+p)-g'(p)=\frac{1}{p}+\varphi'(p)-g'(p)=\frac{1}{p}+h'(p).$$

Donc en reprenant l'encadrement obtenu précédemment,

$$h'(p)-\frac{1}{p}\leqslant h'(x+p)\leqslant h'(p)+\frac{1}{p} \quad\text{soit}\quad -\frac{1}{p}\leqslant h'(x+p)-h'(p)\leqslant\frac{1}{p}$$

d'où $|h'(x+p)-h'(p)|\leqslant\frac{1}{p}$.

Q7. Commençons par fixer $x\in]0,1]$. D'après Q5, on obtient par récurrence, laissée au lecteur, que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $h'(x+p)=h'(x)$ et $h'(p)=h'(1)$. On a donc par la question précédente,

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ |h'(x)-h'(1)|\leqslant\frac{1}{p} \text{ donc quand } p\to+\infty,\ |h'(x)-h'(1)|\leqslant 0 \text{ d'où } h'(x)=h'(1)$$

Nous avons donc montré que h' était constante sur $]0,1]$.
Mais d'après Q5, h' est 1-périodique donc h' est constante sur $]0,+\infty[$.

Q8. D'après la question précédente, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $h(x)=ax+b$. En utilisant $h(1)=\varphi(1)-g(1)=0$ et $h(2)=h(1)=0$ par la question Q5, on en déduit en résolvant le système $\left\{\begin{array}{lcl}a+b&=&0\\2a+b&=&0\end{array}\right.$ (ou en invoquant un argument géométrique : la courbe représentative de h est une droite passant par les points $A(1,0)$ et $B(2,0)$: c'est donc la droite d'équation $y=0$) que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, h(x) = 0 \quad \text{d'où} \quad f = g$$

Q9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n(1/2)\right) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{2n}{2n+1}\right)\right) \\
&= \exp\circ\ln\prod_{n=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{2n}{2n+1}\right) \\
&= \sqrt{\frac{(N+1)!}{N!}}\frac{\prod_{n=1}^{N}(2n)}{\prod_{n=1}^{N}(2n+1)} \\
&= \sqrt{N+1}\frac{\left(\prod_{n=1}^{N}(2n)\right)^2}{\prod_{n=1}^{N}(2n+1)(2n)} = \sqrt{N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N+1)!}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi rédiger par récurrence sur N.

Q10. La formule de Stirling donne

$$N! \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \text{ et } (2N)! \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2N)}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}$$

donc

$$\sqrt{N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N+1)!} = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N}\frac{2^{2N}2\pi N\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}{\sqrt{2\pi(2N)}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, en utilisant la question précédente, et par continuité de ln en $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\ln\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] = \lim_{N\to+\infty}\ln\left[\sqrt{N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N+1)!}\right] = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

Donc $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\psi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\varphi(1)}_{=0} - \frac{1}{2}\ln(\pi) &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi) \\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = 0
\end{aligned}$$

Q11. Il s'agit de montrer que $\psi = \varphi$. Pour cela, il suffit de vérifier que ψ vérifie les conditions (C) d'après la question 8.

(i) ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$, φ étant de classe $\mathcal{C}^1$.

(ii) Pour tout $x > 0$, en utilisant $\varphi\left(\frac{x}{2}+1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\psi(x+1) - \psi(x) &= x\ln(2) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - (x-1)\ln(2) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
&= \ln(2) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(2) + \underbrace{\varphi\left(\frac{x}{2}+1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right)}_{=\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln(x)
\end{aligned}$$

(iii) pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right)$ et les fonctions φ', $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont croissantes, donc par composée et somme de fonctions croissantes, ψ' est croissante sur $]0,+\infty[$.

(iv) $\psi(1) = 0$ d'après la question précédente.

ψ vérifie les conditions C donc par unicité d'une fonction vérifiant C, $\psi = \varphi$ soit :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Probleme 2 *Séries trigonométriques*

Partie 1 : exemples

1. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geqslant 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2-p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$
2. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$
3. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
4. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \leqslant |a_n|+|b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2)$
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x)+b\sin(x)| &= |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \\ &\leqslant \|(a,b)\|\cdot\|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :
   - c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
   - si $(a,b) \neq (0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x),\sin(x))$.
7. Posons $u_n(x) = a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b^2} \geqslant \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases}$$
Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

8. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x+2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et
$$f \in C_{2\pi}$$

9. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$. On a donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ (évident si $p=0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n,k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\cos(kx)\cos(nx) + b_k\sin(kx)\cos(nx))\ dx$$

Posons encore $u_k(x) = a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leqslant |u_k(x)| \leqslant \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k=n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n=0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

11. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

12. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

13. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

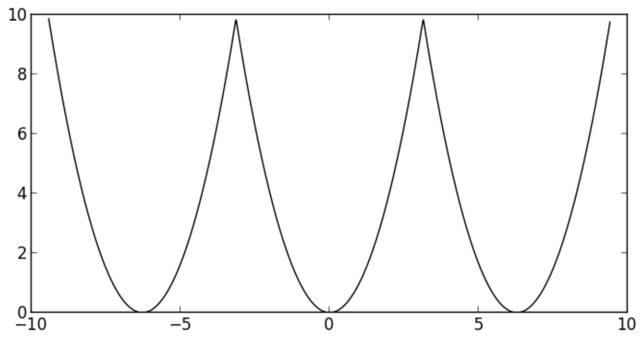
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$$

14. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi,\pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2

a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

15. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

16. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).
Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Je choisis le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n\ :\ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\,dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

17. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.

- $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)$.
- $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- $\|u_n'\|_\infty \leqslant |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

18. On a vu en question 5 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$