

Devoir surveillé de Mathématiques n° 5
Samedi 15 février
Durée 4 heures

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.

Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Le DS est constitué de deux problèmes issus de :

– Concours Commun Polytechnique (CCINP) 2024 PC

– Concours Commun Polytechnique (CCINP) 2017 MP.

Il n'est pas attendu de traiter intégralement les deux problèmes en 4 heures.

Problème 1 Concours Commun Polytechnique (CCINP) 2024 PC

La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1 ,
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions 5 et 6 sont indépendantes.

5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.
6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$$

7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.
8. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1) \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$$

9. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1} (2^N N!)^2}{2N+1 (2N)!}$$

10. Dédurre de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

11. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Probleme 2 Concours Commun Polytechnique (CCINP) 2017 MP

Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π .

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur \mathbb{R} .

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Partie 1 : exemples

- Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx)\right)$ converge normalement sur \mathbb{R} . Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx)\right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

- Ecrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
- Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur \mathbb{R} .
- On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur \mathbb{R} . Converge-t-elle normalement sur \mathbb{R} ?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

- Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Une condition nécessaire

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur \mathbb{R} , alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur \mathbb{R} . Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$ pour k et n entiers.
10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur \mathbb{R} : pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0 . On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$.
On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).
11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum (u_n(x))$ converge normalement sur \mathbb{R} vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n , $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que \mathbb{R} alors pour tout réel x , on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$.
14. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur \mathbb{R} . Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur \mathbb{R} vers f .
15. En déduire les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

16. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

17. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur \mathbb{R} est-elle nécessairement une fonction dérivable sur \mathbb{R} ?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur \mathbb{R} , soit une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
18. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.