

Devoir surveillé de Mathématiques n° 4
Samedi 18 janvier
Durée 4 heures

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.

Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Le DS est constitué de deux sujets de concours, portant tous deux sur l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes :

- Sujet 1 : Concours Commun Polytechnique (CCP) 2010 PC
- Sujet 2 : Concours Centrale 2019 PSI (conforme au P.O. PC 2022)

Chaque élève traitera un seul des deux sujets.

Il inscrira sur sa première page le sujet choisi : Sujet 1 ou Sujet 2.

On conseille à l'élève de choisir le sujet en fonction du concours ambitionné.



EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

* * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f .

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k \text{ fois}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \dots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que f est diagonalisable.
- 2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- 3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) . Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P , exprimer A^m en fonction de D , P et P^{-1} .
- 4) Calculer P^{-1} , puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- 5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
- 6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- 7) Dédire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
- 2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
- 3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2 , q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h , combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice D de f , puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q .

9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} &= p + q \\ f &= \lambda p + \mu q \\ f^2 &= \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Dédire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.

Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q .

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q . Déterminer la dimension de F .

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE III

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

2) En déduire que $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Montrer que pour tout entier ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i .

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F .

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

8.1) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f .

8.2) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h .

8.3) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors $2p - 1 \leq n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

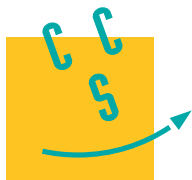
B) 1) Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ .

Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ . Déduire de la question précédente que $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

Fin de l'énoncé



Mathématiques 2

PSI

2019

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

La partie I de ce problème permet de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M^\top$ la transposée de la matrice M .

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k , $M^{k+1} = MM^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E , on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k , $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p .

On pose $J_1 = (0)$ et, pour $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I Premiers résultats

Q 1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q 2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q 4. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.

Q 5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .

Q 6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

I.B – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

Q 7. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ et que $2r \leq n$.

Q 8. On suppose que $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .

Q 9. Donner la matrice de u dans cette base.

Q 10. On suppose $\text{Im } u \neq \text{Ker } u$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\text{Ker } u$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .

Q 11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

I.C – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A .

Q 13. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

Q 14. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n .

Q 15. Montrer la réciproque de la question 12.

Q 16. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q 17. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p , alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A .

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

Q 18. Démontrer que 0 est racine de P .

Q 19. On note m la multiplicité de 0 dans P , ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

I.D – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

I.D.1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

Q 20. Calculer la trace et le rang de A . En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A . Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q 21. Démontrer que A est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P \text{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R .

Q 22. Démontrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q 23. En déduire l'ensemble des racines carrées de A .

On pourra considérer $R' = P^{-1} R P$.

I.D.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q 24. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6 , puis l'ensemble des solutions de l'équation.

I.D.3) Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q 25. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q 26. Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.

II Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

II.A – Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q 27. Démontrer que $\text{Im } u$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

Q 28. Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q 29. Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

Q 30. Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.

Q 31. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

II.B – Partitions d'entiers

On appelle partition de l'entier n toute suite finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ telle que

$$\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n.$$

On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n . Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$.

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p et de rang r .

Q 32. Montrer qu'il existe une partition $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de n et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à la matrice $N_\sigma = \text{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k})$.

Q 33. Soit α un entier naturel non nul. Calculer le rang de J_α^j pour tout entier naturel j . En déduire que J_α est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.

Q 34. En déduire la valeur de α_1 .

Q 35. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda_j = \{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid \alpha_i \geq j\}$. Démontrer que $\text{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j)$.

Q 36. Démontrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'entier $d_j = \text{rg}(u^{j-1}) - \text{rg}(u^j)$ est égal au nombre de blocs J_{α_i} dont la taille α_i est supérieure ou égale à j .

Q 37. Donner la valeur de l'entier k , nombre de blocs J_{α_i} intervenant dans N_σ .

Q 38. Pour tout entier j compris entre 1 et n , exprimer le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j .

Q 39. On suppose qu'il existe une partition σ' de l'entier n et une base $\mathcal{B}'$ de E telles que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ soit égale à $N_{\sigma'}$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.

Q 40. Quel est le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes, toutes de même taille n , telles qu'il n'y ait pas dans cet ensemble deux matrices semblables ?

II.C – Applications

Q 41. Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Déterminer la partition σ de l'entier 5 associée à u et donner la matrice N_σ .

Q 42. À l'aide du résultat de la question 31, démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors M , $2M$ et $M^\top$ sont semblables.

Q 43. À l'aide du résultat de la question 15, démontrer que si M et $2M$ sont semblables, alors M est nilpotente.

II.D – Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions dont le premier terme α_1 est inférieur ou égal à j et $y_{n,j}$ le cardinal de $Y_{n,j}$; on pose $y_{0,0} = 1$.

Q 44. Calculer $y_{n,1}$.

On se propose de montrer que, si $2 \leq j \leq n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.

Q 45. Démontrer que cette égalité est vraie pour $j = n$.

Q 46. Pour $j < n$, vérifier que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$. Conclure.

Q 47. Calculer les $y_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq n \leq 5$ en présentant les résultats sous la forme d'un tableau.

Q 48. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et qui renvoie $y_{n,n}$.

Q 49. Comparer ce résultat à celui de la question 40.

• • • FIN • • •
