Corrigé CCP 2010 PC Math 1

Partie I

A)

1) Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi, P_f est scindé à racines simples, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

2) L'étude des sous-espaces propres donne :
$E_0(f) = \text{Vect}\,(v_1)$ avec $v_1 = (1, -2, 0)$,
$E_1(f) = \text{Vect}\,(v_2)$ avec $v_2 = (1, 0, 1)$,
$E_4(f) = \text{Vect}\,(v_3)$ avec $v_3 = (1, -1, 0)$.

Dans ce cas, la matrice D est donnée par : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et donc $\boxed{A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}}$.

4) En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

5) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ une matrice qui commute avec D. On écrit que $MD = DM$, ce qui donne $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale. Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.
Finalement, $\boxed{\text{les matrices qui commutent avec } D \text{ sont les matrices diagonales}}$.

6) On a $HD = DH = H^3$, donc $\boxed{H \text{ et } D \text{ commutent}}$.

7) D'après les questions 5) et 6), si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\boxed{\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

B)

1) On trouve pour tout entier $m \geqslant 1$: $\boxed{J^m = 3^{m-1} J}$.

2) Travaillons avec les matrices A et J. On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne : $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = \text{id} + \tfrac{1}{3}(4^m - 1)j}$.
Evidemment, cette relation est encore valable pour $m = 0$ (car dans ce cas, on a id $=$id).

3) Un calcul du polynôme caractéristique de A donne : $P_f(X) = P_A(X) = -(X-1)^2(X-4)$. Donc $\boxed{f \text{ admet les deux valeurs propres } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$.

4) D'après la question 2), on peut écrire $f^m = 1^m(\text{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$ pour tout entier $m \geqslant 0$. En posant $p = \text{id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient $\boxed{\text{l'existence de la décomposition voulue}}$.
De plus, on a nécessairement id $= p + q$ (pour $m = 0$) et $f = p + 4q$ (pour $m = 1$). Donc $p = \frac{1}{3}(4\text{id} - f)$ et $q = \frac{1}{3}(f - \text{id})$, d'où $\boxed{\text{l'unicité de cette décomposition}}$.
Enfin, comme id et j sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour p et q.

5) On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p,\ q^2 = q,\ p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme (p, q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.
Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par : $\boxed{h = \pm p \pm 2q}$.

6) On détermine les sous-espaces propres de f :
$E_1(f) = \text{Vect}\,(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1, -1, 0)$ et $w_2 = (0, 1, -1)$,
$E_4(f) = \text{Vect}\,(w_3)$ avec $w_3 = (1, 1, 1)$.
Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.
Et $\boxed{(w_1, w_2, w_3) \text{ est une base de vecteurs propres pour } f}$.
Notons $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$. Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) On peut prendre par exemple : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est Y. Alors $\boxed{h^2 = f}$ car $Y^2 = D$. Et $\boxed{h \text{ n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$, car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base $\mathcal{B}_d$.

9) Soit h tel que $h^2 = f$. Comme f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme $Q_1(X) = (X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de f, donc de h^2.
Donc le polynôme $Q_2(X) = (X^2-1)(X^2-4) = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de h. Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours, $\boxed{h \text{ est diagonalisable}}$.

Partie II

1) On a, en utilisant les trois relations, $(f - \lambda\text{id}) \circ (f - \mu\text{id}) = f^2 - (\lambda+\mu)f + (\lambda\mu)\,\text{id} = 0$. Donc $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de f, scindé à racines simples. Et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

2) A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de f qui n'a que λ et μ comme racines. Il en résulte que $\text{Sp}\,(f) \subset \{\lambda; \mu\}$.
Si μ n'est pas valeur propre de f, la seule valeur propre est donc λ. Comme f est diagonalisable, on a donc $f = \lambda\,\text{id}$. En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :

$$\lambda\text{id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q.$$

D'où $(\lambda - \mu)q = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$, $q = 0$. Ceci est contraire aux hypothèses ; ainsi μ est valeur propre de f.
On montrerait de même que λ est aussi une valeur propre de f. Donc $\boxed{\text{Sp}\,(f) = \{\lambda; \mu\}}$.

3) D'après la question 1), on a : $0 = (f - \lambda\text{id}) \circ (f - \mu\text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\boxed{q \circ p = 0}$.
De même, comme $(f - \mu\text{id}) \circ (f - \lambda\text{id}) = 0$, on trouve $\boxed{p \circ q = 0}$.
Enfin, comme $\text{id} = p + q$, on obtient, en composant par p (resp. par q) : $\boxed{p = p^2}$ (resp. $\boxed{q = q^2}$).

4) Comme $\lambda\mu \neq 0$, f n'admet pas la valeur propre 0. Donc $\text{Ker}\, f = \{0\}$, et comme E est de dimension finie, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
De plus, on a vu en 1) que $f^2 - (\lambda+\mu)f + (\lambda\mu)\,\text{id} = 0$. D'où $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda+\mu)\text{id})$.
On remplace f et id à l'aide de p et q, ce qui donne finalement : $\boxed{f^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}p + \dfrac{1}{\mu}q}$.

5) La relation $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ est vérifiée pour $m = 0, 1, 2$ d'après l'énoncé, et pour $m = -1$ d'après la question précédente.
Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour $m \in \mathbb{N}$, d'autre part pour $-m \in \mathbb{N}$, donne (en utilisant le fait que $p \circ q = q \circ p = 0$) : $\boxed{\forall m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$.

6) Soient deux réels α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. En composant par p, on a $\alpha p = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $p \neq 0$. De même, en composant par q, on obtient $\beta = 0$.
Donc (p, q) est une famille libre et $\boxed{\dim(F) = 2}$.

7) Soit $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$. Alors $h = \alpha p + \beta q$ et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$. Comme (p, q) est une famille libre, on a $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$, i.e. (puisque λ et μ sont supposés positifs) $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \pm\sqrt{\mu}$. On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes. Par conséquent, les 4 solutions sont $\boxed{h = \pm\sqrt{\lambda}\, p \pm \sqrt{\mu}\, q}$.

8) Définissons la matrice K diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I_{k-2} \end{array}\right),$$

où I_{k-2} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$ (bien définie car $k \geqslant 2$).
Alors un produit par blocs donne immédiatement $\boxed{K^2 = I_k}$.

9) On va raisonner matriciellement. Appelons k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ ($k \geqslant 2$) et considérons une base de diagonalisation $\mathcal{B}_d$ pour f ; c'est également une base de diagonalisation pour p et q car $p = \frac{1}{\lambda-\mu}(f - \mu\mathrm{id})$ et $q = \frac{1}{\mu-\lambda}(f - \lambda\mathrm{id})$. De plus, dans la base $\mathcal{B}_d$, ces matrices sont définies par blocs comme suit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array}\right),\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right) \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right).$$

Soit alors p' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$$

où la matrice $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ a été définie à la question précédente. De plus,
• un produit par blocs donne $M^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p)$, donc $p'^2 = p$;
• des produits par blocs donnent $M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$, donc $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$;
• comme M n'est pas diagonale, $p' \notin F = \mathrm{Vect}\,(p, q)$.
En résumé, $\boxed{\text{l'endomorphisme } p' \text{ ainsi construit répond à la question}}$.

10) Si $\dim(E) \geqslant 3$, alors λ ou μ est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est λ. Posons $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$, où p' est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ par propriétés de p' et q, et pourtant $h \notin F$ car $p' \notin F$ et $\lambda \neq 0$.
En conclusion, $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$.

Partie III

1) Pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k\right) p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.$$

2) Prenons $P(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$. Alors $P(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1, ..., m$, et d'après la question précédente $P(f) = 0$. Le polynôme P est annulateur de f et il est scindé à racines simples. Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

3) D'après la question 1), $L_\ell(f) = \sum_{i=1}^{m} L_\ell(\lambda_i) p_i$. Mais $L_\ell(\lambda_i) = \delta_{\ell,i}$ (où $\delta_{\ell,i} = 1$ si $\ell = i$ et 0 si $\ell \neq i$).
Donc $\boxed{L_\ell(f) = p_\ell}$. De plus,

$$(f - \lambda_\ell \mathrm{id}) \circ p_\ell = (f - \lambda_\ell \mathrm{id}) \circ L_\ell(f) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i \mathrm{id})}{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} (\lambda_\ell - \lambda_i)} = \frac{0}{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} (\lambda_\ell - \lambda_i)} = 0.$$

Il en résulte que $\boxed{\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \mathrm{id})}$.
En outre, le polynôme $P(X)$ de la question 2) est annulateur de f et a pour racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Donc $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Et par hypothèse, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant m$, $p_\ell \neq 0$ donc $\mathrm{Im}\,(p_\ell) \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$. Ceci signifie que λ_ℓ est effectivement une valeur propre de f.
Finalement, on a bien $\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}}$.

4) Comme $p_\ell(f) = L_\ell(f)$, $p_i \circ p_j = (L_i \cdot L_j)(j)$.
• Si $i \neq j$, le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ divise $(L_i \cdot L_j)(X)$. Comme $P(f) = 0$, on a donc $(L_i \cdot L_j)(f) = 0$ et $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$.
• Si $i = j$, comme $\mathrm{id} = \sum_{k=1}^{m} p_i$ (relation de l'énoncé pour $k = 0$), en composant par p_i on obtient $\boxed{p_i^2 = p_i}$.

5) L'endomorphisme f étant diagonalisable, d'après le cours on a $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{id})}$

.

Le fait que chaque p_i est un projecteur a été démontré à la question précédente. De plus, comme $\mathrm{id} = \sum_{k=1}^m p_i$, on a $E = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)$. Or on a vu que $\mathrm{Im}\,(p_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$. D'après la somme directe précédente, on a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)$ et $\mathrm{Im}\,(p_i) = E_{\lambda_i}(f)$ pour tout i. Enfin le fait que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ montre que $\boxed{\text{les } p_i \text{ sont les projecteurs associés à cette somme directe}}$.

6) Ecrivons une combinaison linéaire nulle des $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$: $\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0$. Soit $\ell \in [\![1; m]\!]$. En composant par p_ℓ, on obtient $a_\ell p_\ell = 0$, d'où $a_\ell = 0$ car p_ℓ n'est pas nul d'après l'énoncé.
Ainsi tous les coefficients a_i sont nuls et la famille $(p_1, ..., p_m)$ est libre. Donc $\boxed{\dim(F) = m}$.

7) Soit $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \in F$ telle que $h^2 = f$. Alors $h^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ et comme la famille $(p_1, ..., p_m)$ est libre, $\alpha_i^2 = \lambda_i$ pour tout i. Réciproquement, tous les h vérifiant cette relation sont solutions. En résumé, $\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \pm\sqrt{\lambda_i}\, p_i \right\}}$.

8) a) Si $m = n$, il y a n sous-espaces propres dans l'espace E de dimension n.
Donc $\boxed{\text{la dimension de chaque sous-espace propre de } f \text{ est égale à } 1}$.

b) Si $h \in \mathcal{R}(f)$, $h \circ f = h^3 = f \circ h$. Donc h et f commutent et d'après le cours, tout espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par h. Soit x un vecteur propre de f, par exemple $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$. Comme $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$, $h(x) = \mu_i x$ et $\boxed{x \text{ est vecteur propre pour } h}$.

c) Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. D'après la question précédente, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, $h(x_i) = \mu_i x_i$.
Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$, $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ et

$$h(x) = h(x_1 + \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i(x)$$

soit $h = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F}$.

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide est : $\boxed{\forall i \in [\![1; n]\!], \lambda_i \geqslant 0}$.

9) Si $m < n$, alors il existe i tel que $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geqslant 2$. Si les λ_i sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$.

Partie IV

A)

1) Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ et $(a_1, ..., a_p)$ une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$.
En composant par f^{p-1}, comme $f^q = 0$ pour tout $q \geqslant p$, on obtient $a_0 f^{p-1}(x) = 0$ donc $a_0 = 0$. On recommence en composant par $f^{p-2}, ..., f$, ce qui donne au final $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre}}$. Cette famille a p éléments dans un espace de dimension n, donc $\boxed{p \leqslant n}$ et $\boxed{f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0}$.

2) Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = f$. Alors $h^{2n} = f^n = 0$ donc h est nilpotent et d'après 1), $h^n = 0$. De plus, $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ donc $2p-2 \leqslant n-1$, i.e. $\boxed{2p - 1 \leqslant n}$
.

3) On sait d'après le cours que pour $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1; 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^$$

au voisinage de 0. Ici, $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\boxed{a_k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}}$.

4) D'après la question précédente, pour $-1 < x < 1$, $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$ où γ est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne $1 + x = (P_n(x) + x^n\gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n\gamma(x)^2) = \boxed{P_n^2(x) + x^n \eta(x)}$ pour une fonction η bornée au voisinage de 0.
Posons alors $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$; c'est une fonction polynôme. D'après la relation précédente, $x \mapsto Q_n(x)/x^n$ est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si $Q_n(X)$ n'admet pas de terme en X^k pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, ce qui entraîne

$\boxed{X^n \text{ divise } Q_n(X)}$.
On écrira dans la suite $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$ où S_n est une fonction polynôme.

5) • D'après les résultats des questions précédentes, $(P_n(f))^2 - f - \mathrm{id} = (P_n^2)(f) - f - \mathrm{id} = f^n \circ S_n(f)$. Or $f^n = 0$ d'après 1), donc $(P_n(f))^2 = f + \mathrm{id}$, i.e. $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + \mathrm{id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(f + \mathrm{id}) \neq \emptyset}$.
• Plus généralement, $(P_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \mathrm{id} = (P_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \mathrm{id} = (\alpha f)^n \circ S_n(\alpha f)$. Comme $f^n = 0$, $(P_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \mathrm{id}$, i.e. $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id}) \neq \emptyset}$.
• Comme $\beta \neq 0$, soit $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta} f + \mathrm{id})$ (c'est possible d'après ce qui précède). Alors $h^2 = \frac{1}{\beta} f + \mathrm{id}$ et comme $\beta > 0$, $(\sqrt{\beta}\, h)^2 = f + \beta \mathrm{id}$. Donc $\sqrt{\beta}\, h \in \mathcal{R}(f + \beta\mathrm{id})$ et $\boxed{\mathcal{R}(f + \beta\mathrm{id}) \neq \emptyset}$.

B)

1) La matrice $T - \lambda I_n$ est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale ; il en résulte que $\mathrm{rg}\,(T - \lambda I_n) \leqslant n-1$. Un calcul matriciel simple montre que $\mathrm{rg}\,((T - \lambda I_n)^k) \leqslant n - k$ pour $k \in [\![2; n]\!]$ et en particulier pour $k = n$: $\mathrm{rg}\,((T - \lambda I_n)^n) = 0$, i.e. $\boxed{(T - \lambda I_n)^n = 0}$.
Remarquons que cette question peut se traiter directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, mais que ce théorème est hors programme en PC.

2) Comme f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme f n'admet qu'une seule valeur propre λ, il existe une base dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ. D'après la question précédente, $(T - \lambda I_n)^n = 0_n$ et $(f - \lambda \mathrm{id})^n = 0$. Donc $\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id})^n}$.

3) D'après la partie A), comme $(f - \lambda\mathrm{id})^n = 0$, $\mathcal{R}\big((f - \lambda\mathrm{id}) + \lambda\mathrm{id}\big) \neq \emptyset$ (question A)5) en prenant $\beta = \lambda$ et en remplaçant f par $f - \lambda\mathrm{id}$). Donc $\boxed{\text{si } \lambda > 0 \text{ alors } \mathcal{R}(f) \neq \emptyset}$.

CORRIGÉ - CENTRALE-SUPÉLEC 2019 - PSI - MATH. 2

Premiers résultats.

Q1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Puisque $M^k = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$, on a :

$$\begin{aligned} u \text{ est nilpotent d'indice } p &\Leftrightarrow M \text{ est nilpotente d'indice } p \\ &\Leftrightarrow M^p = 0 \text{ et } M^{p-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = 0 \text{ et } Mat_{\mathcal{B}}(u^{p-1}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0. \end{aligned}$$

On utilisera dans la suite que :
$\boxed{u \text{ est nilpotent d'indice } p \text{ si et seulement si } u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0.}$
Soit un endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = u^1 = 0$.
$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$

Q2. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geqslant 2$. p est le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$.
Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (sinon cela contredirait la minimalité de l'entier p).
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$

Q3. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geqslant 2$. Puisque $u^p = 0$, on a également $\boxed{\forall k \geqslant p, u^k = 0.}$
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme u^{p-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme u^{p-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_2 u^2(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- ...
- En itérant le procédé, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-2} = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{p-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [|0, p-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{p-1}(x))$ est libre.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$
L'espace vectoriel E est de dimension 2, donc toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 2.
La famille libre $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est de cardinal p, d'où $p \leqslant 2$. Or $p \geqslant 2$ donc $\boxed{p = 2.}$

Q4. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$, donc $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Puisque $u \neq 0$ n'est pas l'endomorphisme nul, son rang vérifie $\mathrm{rg}\,(u) \geqslant 1$.
Puisque $\dim(E) = n = 2$, $\mathrm{rg}\,(u)$ vaut 1 ou 2.
Supposons par l'absurde que $\mathrm{rg}\,(u) = 2$, alors u serait bijectif, donc u^2 serait également bijectif. Ceci est absurde car $u^2 = 0$. On a donc $\mathrm{rg}\,(u) = 1$.
Par le théorème du rang, on a de plus $\mathrm{rg}\,(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2 - 1 = 1$.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
On obtient $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et ces sous-espaces vectoriels sont de même dimension 1, d'où l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u).}$

Q5. On a montré que $p = 2$ et que la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} = (x, u(x))$ est libre.
La famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est libre et de cardinal 2 dans un espace E de dimension 2, donc c'est une base de E.
De plus $u(x) = 0x + 1u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.$$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (x, u(x)) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } J_2.}$

Q6. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de $M_2(\mathbb{C})$, d'indice de nilpotence p.
Si $p = 1$, alors $A = 0$ donc la trace et le déterminant de A sont nuls.
Si $p \geqslant 2$, on a montré que $p = 2$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Alors u est nilpotent d'indice 2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$.
Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}AP = J_2$ et A et J_2 sont semblables.
Puisque A et J_2 sont semblables, elles ont même trace et même déterminant. Or $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant nul, donc A également.
On a montré que si $A \in M_2(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A) = A^2 = 0$ et A est nilpotente. Ainsi :

$\boxed{\text{les matrices nilpotentes de } M_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

Q7. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$ et de rang r.
Puisque u est nilpotent d'indice $p = 2$, on a $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$ En particulier, on a $r = \mathrm{rg}\,(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par le théorème du rang,

$$2r = r + r \leqslant \mathrm{rg}\,(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = n,$$

donc $\boxed{2r \leqslant n.}$

Q8. On a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont de même dimension r et $\dim(E) = \mathrm{rg}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = 2r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = n - r = r$.
Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\forall i \in [|1, r|], u(e_i) \in \mathrm{Ker}(u)$. Montrons que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ des scalaires tels que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$. Par linéarité de u :

$$0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r).$$

Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc est nul. Or la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre donc $\forall i \in [|1, r|], \lambda_i = 0$.
Finalement, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$ qui est de dimension r, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
La décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \dots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

Q9. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [|1, r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale. On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(J_2, \dots J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q10. On a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ avec $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - r > r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = r$.
Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H.
Comme dans la question **Q8.**, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est encore une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$ qui est de dimension $n - r > r$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$, en rajoutant $(n - r) - r = n - 2r$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1, \dots, v_{n-2r})$.
La décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \dots, e_r)$ de H et la base
$(u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base,
$\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$

Q11. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [|1, r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale. Les vecteurs $v_1, \dots, v_{n-2r}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$ donc $\forall k \in [|1, n - 2r|], u(v_k) = 0$.
On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 puis $n - 2r$ termes 0 sur la diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(J_2, \dots J_2, 0_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q12. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \geqslant 1$. Alors $A^p = 0$ donc le polynôme $P(X) = X^p$ annule A.

D'après le cours, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P) = \{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de A est de degré $n \geqslant 1$ et scindé sur $\mathbb{C}$ donc possède au moins une racine, donc le spectre de A est non vide et nécessairement $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors } 0 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$

Q13. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et diagonalisable.
Alors A est semblable à une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale contient les valeurs propres de A. On a montré que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc $D = 0$.
Ainsi $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = D = 0$, d'où $A = P0P^{-1} = 0$ et A est nulle.
Réciproquement, la matrice nulle est clairement diagonalisable et nilpotente.

$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$

Q14. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Puisque 0 est la seule valeur propre, la seule racine de son polynôme caractéristique χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X) = X^n$.
Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A) = A^n = 0$ et la matrice A est nilpotente (d'indice de nilpotence $p \leqslant n$).

$\boxed{\text{Une matrice } A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vaut } \chi_A(X) = X^n.}$

Q15. On suppose que 0 est l'unique valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Les racines du polynôme caractéristique χ_A sont exactement les valeurs propres de A. Donc la seule racine de χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X) = X^n$.
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.

$\boxed{\text{Si } 0 \text{ est l'unique valeur propre de } A \in M_n(\mathbb{C}), \text{ alors } A \text{ est nilpotente.}}$

Q16. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire de diagonale nulle. Alors le polynôme caractéristique se calcule aisément : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n$ (la matrice $XI_n - A$ est en effet triangulaire supérieure avec des X sur sa diagonale).
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.

$\boxed{\text{Une matrice triangulaire de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de diagonale nulle est nilpotente.}}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont semblables donc ont même spectre, or $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc les coefficients diagonaux de T, qui sont aussi ses valeurs propres, valent 0.

$\boxed{\text{Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$

Q17. Soit A une matrice nilpotente d'indice p. Alors $A^p = 0$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme multiple de X^p. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = X^pQ(X)$.
Alors $P(A) = A^pQ(A) = 0Q(A) = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A.

$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente d'indice } p, \text{ alors tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ multiple de } X^p \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

Q18. Soit A une matrice nilpotente et P un polynôme annulateur de A.
Puisque A est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Puisque P annule A, $\{0\} = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P)$: les valeurs propres de A sont des racines de P.
En particulier, $\boxed{0 \text{ est racine de } P.}$

Q19. On a $P(A) = 0$ et $P(X) = X^mQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
Puisque $Q(0) \neq 0$, 0 n'est pas racine de Q. On note d le degré de Q, $C \neq 0$ son coefficient dominant, a_k ses racines qui sont toutes non nulles, alors

$$Q(X) = C\prod_{k=1}^{d}(X - a_k). \quad Q(A) = C\prod_{k=1}^{d}(A - a_kI_n).$$

A est nilpotente donc 0 est la seule valeur propre de A. Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, λ n'est pas valeur propre de A donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la matrice $(A - \lambda I_n)$ est inversible.
Ainsi $\forall k \in [|1, d|], a_k \neq 0$ donc $(A - a_kI_n)$ est inversible. Alors $Q(A)$ est un produit de matrices inversibles, donc $\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$
On en déduit alors :

$$0 = P(A) = A^mQ(A) \quad \Rightarrow \quad A^m = 0(Q(A))^{-1} = 0$$

donc $A^m = 0$. Par minimalité de l'indice de nilpotence p de A, on a $p \leqslant m$. Ainsi $\exists l \in \mathbb{N},\ m = p + l$ et

$$P(X) = X^mQ(X) = X^p(X^lQ(X)),$$

donc $\boxed{P \text{ est un multiple de } X^p \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$

Q20. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. La trace de A est nulle : $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0$.

$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0.}$

Notons C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A, puisque $C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$ on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\ (C_1)$ donc $\mathrm{rg}\ (A) \leqslant 1$. Or $A \neq 0$ donc $\mathrm{rg}\ (A) \geqslant 1$. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}\ (A) = 1.}$
Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}\ (A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2.}$

En particulier, 0 est valeur propre de A, de multiplicité au moins 2.
Supposons que 0 soit valeur propre de multiplicité exactement 2 dans χ_A, alors il existe une valeur propre $\lambda \neq 0$, nécessairement de multiplicité 1.
Puisque la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, on aurait :

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 = 2 \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda,$$

donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde. Ainsi 0 est valeur propre de multiplicté 3 dans le polynôme caractéristique, donc $\boxed{\chi_A(X) = X^3.}$ Par la question **Q14.**, A est nilpotente.
Un simple calcul montre que $A^2 = 0$ avec $A \neq 0$, donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence } p = 2.}$

Q21. A est nilpotente d'indice 2 donc il existe $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que $Ae_1 \neq 0$. On pose ensuite $e_2 = Ae_1$. On peut prendre par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(A), \quad e_2 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

$A^2 = 0$ donc $Ae_2 = A^2e_1 = 0$ et $e_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Or $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 donc on peut trouver e_3 tel que (e_2, e_3) forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$. On prend par exemple

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

Posons

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Alors P est inversible (en calculant son déterminant par exemple). Puisque $Ae_1 = e_2, Ae_2 = Ae_3 = 0$, la matrice de l'endomorphisme u canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vaut

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(J_2, J_1).}$$

Q22. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho)$. L'égalité $R^2 = A$ conduit à

$$R^2 = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho))^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho^2) = A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u).$$

Donc $\boxed{\rho^2 = u.}$ Alors $u \circ \rho = \rho^2 \circ \rho = \rho^3 = \rho \circ \rho^2 = \rho \circ u$ donc $\boxed{u \text{ et } \rho \text{ commutent.}}$
Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. $\exists y \in E,\ x = u(y)$. Alors $\rho(x) = \rho(u(y)) = u(\rho(y)) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $u(\rho(x)) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$ donc $\rho(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Puisque $A^2 = 0$, on a $u^2 = 0$ d'où $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$. Ainsi $\rho^4 = 0$ et $\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$

Q23. Posons $R' = P^{-1}RP$. Alors

$$(R')^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2PP^{-1}AP = \mathrm{Diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la question **Q21.** pour les vecteurs e_1, e_2, e_3, on a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$. Déterminons $\rho(e_1), \rho(e_2), \rho(e_3)$ en utilisant que la matrice de ρ^2 vaut $(R')^2$, et que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u. On a en particulier

$$\begin{cases} \rho^2(e_1) &= e_2. \\ \rho^2(e_2) &= 0. \\ \rho^2(e_3) &= 0. \end{cases}$$

- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ est stable par ρ donc $\exists a \in \mathbb{C}, \rho(e_2) = ae_2$.
  Alors $\rho^2(e_2) = a^2e_2 = 0$ donc $a = 0$ et $\boxed{\rho(e_2) = 0.}$
- $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$ est stable par ρ donc $u(e_3) \in \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \rho(e_3) = ae_2 + be_3$. Alors

  $$\rho^2(e_3) = a\rho(e_2) + b\rho(e_3) = b\rho(e_3) = abe_2 + b^2e_3 = 0.$$

  Puisque (e_2, e_3) est libre, $ab = b^2 = 0$ donc $b = 0$ et $\boxed{\rho(e_3) = ae_2.}$
- $\exists (b, c, d) \in \mathbb{C}^3, \rho(e_1) = be_1 + ce_2 + de_3$. Alors

  $$\rho^2(e_1) = e_2 = b\rho(e_1) + c\rho(e_2) + d\rho(e_3) = b(be_1 + ce_2 + de_3) + dae_2 = b^2e_1 + (bc + da)e_2 + bde_3.$$

  Donc

  $$b^2e_1 + (bc + da - 1)e_2 + bde_3 = 0.$$

  La famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc ces trois coefficients sont nuls.

  $$\begin{cases} b^2 &= 0. \\ bc + da - 1 &= 0. \\ bd &= 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ da &= 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ d &= 1/a,\ a \neq 0. \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'il existe $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll}\rho(e_1) & = & ce_2 + (1/a)e_3. \\ \rho(e_2) & = & 0. \\ \rho(e_3) & = & ae_2.\end{array}\right. \Rightarrow R' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une telle matrice vérifie bien $(R')^2 = \mathrm{Diag}(J_2, J_1)$.
Donc l'ensemble des racines carrées de A vaut :

$$\boxed{\{\text{racines carrées de } A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, a \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C} \right\}}$$

où P est la matrice de passage définie à la question **Q21.**.

Q24. On démontre le résultat préliminaire suivant.
Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Alors $\chi_B(X) = X^n$ donc $B^n = 0$ et $p \leqslant n$.
Ainsi $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } p \text{ d'une matrice nilpotente } B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie } p \leqslant n.}$

On suppose qu'il existe une solution R vérifiant $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En calculant $(J_3)^2$ et $(J_3)^3$:

$$R^4 = (R^2)^2 = (J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^6 = (R^2)^3 = (J_3)^3 = 0.$$

On en déduit que $\boxed{R \text{ est nilpotente.}}$ Puisque $R^4 \neq 0$ et $R^6 = 0$, l'indice de nilpotence de R vaut $q = 5$ ou $q = 6$, or $n = 3$ donc $q > n$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{L'équation } R^2 = J_3 \text{ n'a pas de solution.}}$

Q25. Soit $V \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p, avec $2p - 1 > n$.
On suppose qu'il existe une solution R vérifiant $R^2 = V$.
V est nilpotente d'indice p donc $V^p = 0$ et $V^{p-1} \neq 0$. Alors

$$R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$$

donc R est nilpotente. Notons q l'indice de nilpotence de R. On a

$$R^{2p-2} = (R^2)^{p-1} = V^{p-1} \neq 0.$$

Donc l'indice de nilpotence de R est strictement supérieur à $2p - 2$:

$$q \geqslant 2p - 1 > n$$

donc $q > n$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{Si } 2p - 1 > n, \text{ alors l'équation } R^2 = V \text{ n'a pas de solution.}}$

Q26. Soit $n \geqslant 3$. On remarque que

$$(J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

avec $B^2 = 0$ donc B est nilpotente d'indice 2.
Posons $\boxed{V = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-3} \right) \in M_n(\mathbb{C}).}$ On a $V^2 = 0$ donc V est nilpotente d'indice $p = 2$. De plus

$$(\mathrm{Diag}\,(J_3, 0_{n-3}))^2 = \mathrm{Diag}\left((J_3)^2, (0_{n-3})^2\right) = V,$$

donc $\boxed{V \text{ admet au moins une racine carrée.}}$

Deuxième partie.

Q27. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } u.}$
Notons $v = u_{|\mathrm{Im}(u)}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$. u est nilpotent d'indice p donc $u^p = 0$.
Alors $\forall x \in \mathrm{Im}(u), v^p(x) = u^p(x) = 0$ donc v est nilpotent. Notons q l'indice de nilpotence de v.
Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors $\exists y \in E,\ x = u(y)$, donc $v^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ donc $q \leqslant p - 1$.
u est nilpotent d'indice p donc $u^{p-1} \neq 0$. Donc $\exists x \in E, u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et :

$$v^{p-2}(u(x)) = u^{p-2}(u(x)) = u^{p-1}(x) \neq 0,$$

donc $v^{p-2} \neq 0$. Finalement $q \geqslant p - 1$ et $q = p - 1$.
$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } v = u_{|\mathrm{Im}(u)} \text{ est nilpotent d'indice } q = p - 1.}$

Q28. Soit $x \in E$ non nul et $C_u(x) = \text{Vect}\,(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
Montrons que $C_u(x)$ est stable par u. Soit $y \in C_u(x)$.
Le vecteur y est combinaison linéaire d'un nombre fini de $u^k(x)$, donc $\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \text{Vect}\,(u^k(x), 0 \leqslant k \leqslant d)$. Ainsi $\exists (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x). \\ u(y) &= \sum_{k=0}^{d} a_k u(u^k(x)) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1}(x) \in \text{Vect}\,(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = C_u(x). \end{aligned}$$

On a montré que $\forall y \in C_u(x)$, $u(y) \in C_u(x)$, donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$

Puisque $u^p = 0$, on a $u^p(x) = 0$ avec $p \geqslant 1$. Posons $\mathcal{P}_0 = \{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$. On a $p \in \mathcal{P}_0$. $\mathcal{P}_0$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément noté $s(x)$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe un plus petit entier } s(x) \geqslant 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0.}$

Q29. On a $\forall k \geqslant s(x), u^k(x) = 0$ donc

$$C_u(x) = \text{Vect}\,(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}\,(u^k(x), 0 \leqslant k \leqslant s(x)-1) = \text{Vect}\,(x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x)),$$

ce qui prouve que la famille $(x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x))$ est génératrice de $C_u(x)$.
En appliquant la même technique que dans la question **Q3.**, montrons que cette famille est libre. Pour simplifier les notations, on pose $q = s(x)$. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{C}^q$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme u^{q-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme u^{q-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
- ...
- On obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{q-2} = 0$. Alors $\lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{q-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [|0, q-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

Ainsi :

$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x)) \text{ est libre et génératrice, donc une base de } C_u(x).}$

Dans cette base, par construction, la matrice de l'endomorphisme $u_{|C_u(x)}$ induit par u sur $C_u(x)$ vaut :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}.}$$

Q30. Montrons par récurrence sur $p \geqslant 1$ l'hypothèse (H_p) suivante :

$\boxed{(H_p) : \text{si } u \text{ est nilpotent d'indice } p, \text{ alors il existe des vecteurs } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant t} \text{ tels que } E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$

Initialisation : $p = 1$. Soit u nilpotent d'indice 1, alors $u = 0$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base quelconque de E. Alors $\forall i, \in [|1, n|], s(x_i) = 1$ donc $C_u(x_i) = \text{Vect}\,(x_i)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \text{Vect}\,(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} C_u(x_i)$.

Hérédité $(H_{p-1}) \Rightarrow (H_p)$ **:** Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ et montrons-le au rang p.
Soit u nilpotent d'indice p. Soit $v = u_{|\text{Im}(u)}$ l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.
Alors v est nilpotent d'indice $p-1$ (question **Q27.**).
Par hypothèse de récurrence appliquée à v, il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_t$ de $\text{Im}(u)$ tels que

$$\text{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i).$$

Pour tout $i \in [|1, t|]$, on a $y_i \in \text{Im}(u)$ donc $\exists x_i \in E, y_i = u(x_i)$. Remarquons que $s(x_i) = s(y_i) + 1$. On a :

$$\begin{aligned} C_u(x_i) &= \text{Vect}\,(x_i, u(x_i), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ C_u(y_i) &= \text{Vect}\,(y_i, \ldots, u^{s(y_i)-1}(y_i)) \\ &= \text{Vect}\,(u(x_i), \ldots, u^{s(y_i)}(x_i)) \\ &= \text{Vect}\,(u(x_i), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ \dim(C_u(x_i)) &= \dim(C_u(y_i)) + 1. \end{aligned}$$

Posons $z = \dim(\text{Ker}(u))$. Les vecteurs $(u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$ forment une famille libre de cardinal t de $\text{Ker}(u)$, que l'on peut compléter en une base de $\text{Ker}(u)$ à l'aide de $z - t$ vecteurs :
$(u^{s(x_i)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_t), v_1, \ldots, v_{z-t})$. On a $v_j \in \text{Ker}(u)$ donc $s(v_j) = 1$ et

$C_u(v_j) = \text{Vect}\,(v_j)$.
On introduit le sous-espace vectoriel F de E suivant :

$$F = \left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j)\right).$$

Calculons la dimension de F :

$$\begin{aligned}
\dim(F) &= \sum_{i=1}^{t} \dim(C_u(x_i)) + \sum_{j=1}^{z-t} \dim(C_u(v_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{t} (\dim(C_u(y_i)) + 1) + \sum_{j=1}^{z-t} 1 \\
&= \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i)\right) + t + (z-t) \\
&= \dim(\text{Im}(u)) + z \\
&= \text{rg}\,(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E),
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème du rang. Donc $F = E$, autrement dit Donc $\boxed{E = \left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j)\right)}$, ce qui termine la récurrence.

Q31. D'après la question **Q29.**, la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ vaut :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \ldots J_{s(x_t)}).}$$

Q32. On utilise la question **Q29.**. Il existe une décomposition de l'espace $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \ldots J_{s(x_t)}).$$

Quitte à permuter les éléments de la base $\mathcal{B}$ pour réordonner les éléments blocs diagonaux, on peut supposer que

$$s(x_1) \geqslant s(x_2) \geqslant \ldots \geqslant s(x_k).$$

De plus $s(x_1) + s(x_2) + \ldots + s(x_k) = \dim(E) = n$.
Avec les notations précédentes, en posant $\forall i \in [|1,k|], \alpha_i = s(x_i)$ et $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ vérifiant } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k}).}$

Q33. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_\alpha(\mathbb{C}). \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \forall i \in [|1, n-1|], \quad J_\alpha(e_i) &=& e_{i+1}. \\ J_\alpha(e_n) &=& 0. \end{array} \right.$$

En étudiant l'action de J_α sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on montre aisément que pour $k \leqslant n-1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \forall i \in [|1, n-k|], & J_\alpha^k(e_i) &=& e_{i+k}. \\ \forall i \in [|n-k+1, n|], & J_\alpha^k(e_i) &=& 0. \end{array} \right.$$

Donc J_α^k est une matrice contenant $n-k$ termes 1 sur la k-ième sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.
Ainsi rg $(J_\alpha) = \alpha - 1$, rg $(J_\alpha^k) = \alpha - k$ pour $k \leqslant n-1$ et enfin rg $(J_\alpha^n) = 0$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcll} \text{rg}\,(J_\alpha^j) &=& \alpha - j & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1. \\ \text{rg}\,(J_\alpha^j) &=& 0 & \text{si } 0 \leqslant j \geqslant \alpha. \end{array} \right.}$$

En particulier on a rg $(J_\alpha^\alpha) = 0$ donc $J_\alpha^\alpha = 0$ et rg $(J_\alpha^{\alpha-1}) = 1$ donc $J_\alpha^{\alpha-1} \neq 0$.
D'où $\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice } \alpha.}$

Q34. u est nilpotent d'indice p donc la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})$ est aussi nilpotente d'indice p.
Puisque J_α est nilpotente d'indice p avec $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p$, on a $\forall i \in [|1,k|], J_{\alpha_i}^{\alpha_1} = 0$ donc

$$\begin{array}{rcll} N_\sigma^{\alpha_1} = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1}) &=& 0. & \\ N_\sigma^{\alpha_1 - 1} = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1-1}) &\neq& 0 & \text{car } J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1} \neq 0. \end{array}$$

Ainsi N_σ est nilpotente d'indice α_1. Donc $\boxed{\alpha_1 = p.}$

Q35. On note $\Lambda_j = \{i \in [|1,k|], \alpha_i \geqslant j\}$. On a

$$N_\sigma^j = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})^j = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^j, \ldots, J_{\alpha_k}^j), \quad \text{donc} \quad \text{rg}\,(N_\sigma^j) = \sum_{i=1}^{k} \text{rg}\,(J_{\alpha_i}^j).$$

Si $i \notin \Lambda_j$, alors $\alpha_i < j$ donc $J^j_{\alpha_i} = 0$ et $\mathrm{rg}\,(J^j_{\alpha_i}) = 0$.
Si $i \in \Lambda_j$, alors $\alpha_i \geqslant j$ donc $\mathrm{rg}\,(J^j_{\alpha_i}) = \alpha_i - j$. Ainsi

$$\mathrm{rg}\,(N^j_\sigma) = \sum_{i \notin \Lambda_j} 0 + \sum_{i \in \Lambda_j} \mathrm{rg}\,(J^j_{\alpha_i}) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j). \quad \boxed{\mathrm{rg}\,(N^j_\sigma) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).}$$

Q36. D'après la question **Q35.** :

$$d_j = \mathrm{rg}\,(u^{j-1}) - \mathrm{rg}\,(u^j) = \mathrm{rg}\,(N^{j-1}_\sigma) - \mathrm{rg}\,(N^j_\sigma) = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).$$

Remarquons que $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$. On décompose $\Lambda_{j-1} = \Lambda_j \sqcup (\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j)$ avec

$$\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j = \{i \in [|1,k|] | \alpha_i \geqslant j-1 \text{ et } \alpha_i < j\} = \{i \in [|1,k|] | \alpha_i = j-1\}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) + \sum_{i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} (\alpha_i - (j-1)) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} 0 \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} 1 = \mathrm{Card}(\Lambda_j). \end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{d_j = \mathrm{Card}(\Lambda_j)}$:

$\boxed{d_j \text{ est égal au nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ dont la taille vérifie } \alpha_i \geqslant j.}$

Q37. Pour tout bloc J_{α_i}, sa taille est supérieure ou égale à 1.
Donc le nombre total k de blocs est égal au nombre de blocs J_{α_i} dont la taille $\alpha_i \geqslant 1$, d'où $\boxed{k = d_1.}$
Ainsi $k = d_1 = \mathrm{rg}\,(u^{1-1}) - \mathrm{rg}\,(u^1) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Id}_E) - \mathrm{rg}\,(u) = n - \mathrm{rg}\,(u)$. Finalement $\boxed{k = d_1 = n - \mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Ker}(u)).}$

Q38. Soit $j \in [|1,n|]$. Le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j est égal au nombre de blocs de taille $\alpha_i \geqslant j$ moins le nombre de blocs de taille $\alpha_i \geqslant j-1$, c'est-à-dire :

$$d_j - d_{j-1} = \Big(\mathrm{rg}\,(u^{j-1}) - \mathrm{rg}\,(u^j)\Big) - \Big(\mathrm{rg}\,(u^{j-2}) - \mathrm{rg}\,(u^{j-1})\Big) = -\mathrm{rg}\,(u^j) + 2\mathrm{rg}\,(u^{j-1}) - \mathrm{rg}\,(u^{j-2}).$$

Le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j vaut $\boxed{d_j - d_{j-1} = -\mathrm{rg}\,(u^j) + 2\mathrm{rg}\,(u^{j-1}) - \mathrm{rg}\,(u^{j-2}).}$

Q39. On suppose qu'il existe deux partitions σ et σ' de l'entier n telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = N_{\sigma'}$.
D'après la question **Q38.**, le nombre de blocs de taille exactement égale à j vaut $-\mathrm{rg}\,(u^j) + 2\mathrm{rg}\,(u^{j-1}) - \mathrm{rg}\,(u^{j-2})$ donc ne dépend que de l'endomorphisme u.
Pour tout $j \in [|1,n|]$, les matrices N_σ et $N_{\sigma'}$ ont même nombre de blocs de taille j, ce qui détermine entièrement les deux matrices. Ainsi $N_\sigma = N_{\sigma'}$ et $\boxed{\sigma = \sigma'.}$

Q40. Dans la question **Q39.**, on a montré que si N_σ et $N_{\sigma'}$ représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes, alors $\sigma = \sigma'$.
On en déduit immédiatement que si $\sigma \neq \sigma'$, alors N_σ et $N_{\sigma'}$ ne sont pas semblables.
Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{N_\sigma, \sigma \in \Gamma_n\} \subset M_n(\mathbb{C}),$$

alors $\mathcal{E}$ est constitué de matrices nilpotentes, telles qu'il n'existe pas dans $\mathcal{E}$ deux matrices semblables. De plus $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_n) = \mathrm{Card}(\Gamma_n)$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. D'après la question **Q32.**, $\exists \sigma \in \Gamma_n$ telle que A est semblable à N_σ.
Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ telles qu'il n'y en ait pas deux semblables, alors les matrices de F sont semblables à un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{E})$.
Le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$, ne contenant pas deux matrices semblables, vaut $\boxed{\mathbf{Card}(\Gamma_n).}$
(Autrement dit, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$ est exactement égal au nombre $\mathrm{Card}(\Gamma_n)$ de partitions de l'entier n.)

Q41. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Soit x_1 le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^3(x_1) = 0.$$

Donc $s(x_1) = 3$ et $(x_1, u(x_1), u^2(x_1))$ forme une base de $C_u(x_1)$.
Soit x_2 le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_2) = 0.$$

Donc $s(x_2) = 2$ et $(x_2, u(x_2))$ forme une base de $C_u(x_2)$.
La famille $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), u^2(x_1), x_2, u(x_2))$ est libre et de cardinal 5, donc forme une base de $\mathbb{C}^5$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}) = \mathrm{Diag}(J_3, J_2), \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = 3 \geqslant \alpha_2 = 2, \quad 3+2 = 5.$$

Donc $\boxed{\sigma = (3, 2) \text{ est la partition de l'entier 5 associée à } u, \text{ avec } N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_3, J_2).}$

Remarque : ce résultat est cohérent avec la question **Q37.** : le nombre de blocs vaut $k = 2$, or $\mathrm{rg}\,(u) = 3$ donc $n - \mathrm{rg}\,(u) = 5 - 3 = 2 = k$.

Q42. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Par la question **Q30.**, il existe des vecteurs $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant t}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base adaptée à cette décomposition, alors par la question **Q31.** :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)}).}$$

- **Montrons que M et $2M$ sont semblables.** $2u$ est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $2M$. Soit $i \in [|1, t|]$, alors

$$(2u)^k(x_i) = 2^k u^k(x_i) = 0 \Leftrightarrow u^k(x_i) = 0$$

donc le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k(x_i) = 0$ est le même pour u et $2u$, on le note toujours $s(x_i)$. De plus,

$$C_{2u}(x_i) = \mathrm{Vect}\,(x_i, 2u(x_i), \dots, 2^{s(x_i)-1} u^{s(x_i)-1}(x_i)) = \mathrm{Vect}\,(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)) = C_u(x_i).$$

Donc on a la même décomposition de l'espace pour u et pour $2u$:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) = E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_{2u}(x_i).$$

Il vient alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(2u).$$

Or M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, $2M$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(2u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc par transitivité de la similitude, $\boxed{M \text{ et } 2M \text{ sont semblables.}}$

- **Montrons que M et M^T sont semblables.**
M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc M est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})$, donc M^T est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$.
Pour $x \in E$, $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$, avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}.}$$

En inversant l'ordre de la base, c'est-à-dire en posant $\mathcal{B}_{\text{inv}} = (u^{s(x)-1}(x), \dots, u(x), x)$, $\mathcal{B}_{\text{inv}}$ est encore une base de $C_u(x)$, avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}^T.}$$

Soit $\mathcal{B}_2$ la base obtenue en rangeant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, en sens inverse dans chaque base de $C_u(x_i)$. Plus précisément, on pose donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_1 & = & (x_1, \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \quad x_2, \dots, u^{s(x_2)-1}(x_2), \quad \dots, \quad x_t, \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)). \\ \mathcal{B}_2 & = & (u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_1, \quad u^{s(x_2)-1}(x_2), \dots, x_2, \quad \dots, \quad u^{s(x_t)-1}(x_t), \dots, x_t). \end{array}$$

D'après ce qui précède :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}^T, \dots J_{s(x_t)}^T) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T.}$$

Par transitivité, M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$, donc M est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$,
donc $\boxed{M \text{ est semblable à } M^T.}$

Q43. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que M et $2M$ sont semblables.
Alors M et $2M$ ont même polynôme caractéristique. Puisque l'ensemble des valeurs propres d'une matrice est égal aux racines de son polynôme caractéristique, on en déduit que M et $2M$ ont mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M)$.
On a

$$\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(2M - 2\lambda I_n),$$

donc λ est valeur propre de M si et seulement si 2λ est valeur propre de $2M$. Il vient :

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M) = \{2\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. Supposons par l'absurde que $\lambda \neq 0$. Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall k \geqslant 0, 2^k\lambda \in \mathrm{Sp}(2M) = \mathrm{Sp}(M)$. Alors $\mathrm{Sp}(M)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n et contient l'ensemble infini suivant :

$$\{2^k\lambda, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Sp}(M),$$

ce qui est absurde. Donc $\lambda = 0$ et 0 est l'unique valeur propre de M. D'après la question **Q15.**, M est nilpotente.

On a montré que $\boxed{\text{si } M \text{ et } 2M \text{ sont semblables, alors } M \text{ est nilpotente.}}$

Q44. $Y_{n,1}$ est le nombre de partitions dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leqslant 1$.
Puisque α_1 est le plus grand terme, tous les autres termes valent 1 et on obtient une unique partition $(1, 1, \ldots, 1)$ de n (avec $k = n$). Par suite, $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad y_{n,1} = 1.}$
Remarquons pour la suite que $y_{0,0} = 1$ par convention mais pour $n \geqslant 1, y_{n,0} = 0$.

Q45. Pour $j = n$, le membre de droite de la formule vaut :

$$y_{n,n-1} + y_{n-n,\min(j,n-j)} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1.$$

Or

$$Y_{n,n} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leqslant n\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leqslant n-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = n\} = Y_{n,n-1} \sqcup \{(n)\},$$

car il existe une seule partition, la partition (n), telle que $\alpha_1 = n$.
Ainsi $\mathrm{Card}(Y_{n,n}) = \mathrm{Card}(Y_{n,n-1}) + 1$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1.}$ L'égalité est vraie pour $j = n$.

Q46. Soit $j < n$.

$$Y_{n,j} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leqslant j\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leqslant j-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\} = Y_{n,j-1} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1$$

En passant au cardinal,

$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + \mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}).$$

Soit $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ dans l'ensemble $\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}$. Alors $\alpha_1 = j$ et $j \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$ avec $\alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n - \alpha_1 = n - j$, donc $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y_{n-j,j}$.
Ainsi

$$\mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}) = \mathrm{Card}(Y_{n-j,j}) = y_{n-j,j}.$$

On en déduit que $\boxed{\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.}$
Si $j \leqslant n - j$, alors $\min(n-j, j) = j$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Si $j > n - j$, alors $\min(n-j, j) = n - j$ et $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Dans les deux cas, $\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Avec la question **Q45.**, on a $\boxed{\forall j \in [\![2, n]\!], \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}.}$

Q47. Calculons les $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 5$.
Puisque $y_{n,1} = 1$, on remplit la colonne $j = 1$ de termes 1.
Ensuite, on utilise la relation de récurrence $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.
Par exemple, $y_{2,2} = y_{2,1} + 1 = 1 + 1 = 2$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	2			
$n=3$	1	2	3		
$n=4$	1	3	4	5	
$n=5$	1	3	5	6	7

Q48. On propose la fonction récursive Python `calculY(n,j)` qui calcule les $y_{n,j}$, et la fonction Python `calculY2(n)` qui calcule les $y_{n,n}$ en appelant la fonction `calculY(n,j)` :

```
def calculY(n,j) :
    if n==0 :
        if j==0 :
            return 1
        else :
            return 0
    elif n >= 1 :
        if j==0 :
            return 0
        elif j==1 :
            return 1
        elif j>= 2 :
            return calculY(n,j-1) + calculY(n-j, min(j,n-j))

def calculY2(n):
    return calculY(n,n)

for n in range (1,6) :
    print('Ligne ',n)
```

```
    for j in range(1,n+1) :
        print('n=',n,'j=',j,'    y=',calculY(n,j))
```

Q49. Ce résultat fait référence à $y_{n,n}$.
$Y_{n,n}$ est l'ensemble des partitions de n dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leqslant n$, ce qui est le cas pour toutes les partitions de n.
Donc $\boxed{y_{n,n} = \mathrm{Card}(\Gamma_n)}$ est le nombre de partitions de l'entier n, c'est aussi le résultat de la question **Q40.**, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$.
Vérifions par exemple qu'il existe $y_{5,5} = 7$ partitions de l'entier 5 :

$$\begin{array}{rcll} 5 & = & 1+1+1+1+1 & \text{(partition 1)} \\ & = & 2+1+1+1 & \text{(partition 2)} \\ & = & 2+2+1 & \text{(partition 3)} \\ & = & 3+1+1 & \text{(partition 4)} \\ & = & 3+2 & \text{(partition 5)} \\ & = & 4+1 & \text{(partition 6)} \\ & = & 5 & \text{(partition 7).} \end{array}$$