

Exercice 1

1. **a.** Soit $n \geq 1$. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit S_n la n -ème somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$.
Alors $S_n = \sum_{k=1}^n u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1$.
Donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la suite (u_{n+1}) converge, i.e. si et seulement si (u_n) converge.
Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- b.** On a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))$.
D'où $\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
- c.** Soit $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$
 $\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
 $\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
Il vient $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$.
- d.** On a $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} < 0$, et $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2n^2}$ est une série convergente.
D'après les théorèmes de comparaison pour les séries à signe constant, $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
Puis, d'après la question 1a, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
Ainsi, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $H_n - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
Donc $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ell + o(1)$.
Puis $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. **a.** Si $\alpha \geq 0$, $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$, donc la série S_α diverge grossièrement.
Si $\alpha < 0$, la suite $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, S_α converge.
Par conséquent, la série S_α converge si et seulement si $\alpha > 0$.
3. **a.** Soit $f_n : x \mapsto x(n-x)$. f_n est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = n - 2x$. Puis f'_n est positive sur $] -\infty, \frac{n}{2}]$ et négative sur $[\frac{n}{2}, +\infty[$.
Donc f est croissante sur $] -\infty, \frac{n}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{2}, +\infty[$.
Ainsi, f admet un maximum en $\frac{n}{2}$.
Le maximum de la fonction $f_n : x \mapsto x(n-x)$ est $f_n(\frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4}$.

$$\text{b. } c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^\alpha} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$$

$$\text{puis } |c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $0 < k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$.

Puis $0 < (k(n-k))^\alpha \leq \frac{n^{2\alpha}}{4^\alpha}$ par croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$ car $\alpha > 0$.

Enfin $0 < \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$ par passage à l'inverse.

Donc $|c_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

Il vient $|c_n| \geq \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}$.

c. On suppose que $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Alors $\frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}} \sim \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Or $2\alpha - 1 \leq 0$. Donc $\frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (ou 2 si $\alpha = 1/2$).

Ainsi (c_n) ne converge pas vers 0 et $\sum_{n \geq 2} c_n$ diverge grossièrement.

On a bien montré que, pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ diverge.

4. **a.** On trouve $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x(n-x)} = \frac{1}{nx} + \frac{1}{n(n-x)}$.

b. On a $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$ (d'après la question précédente)

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{1}{j}$ d'où $c_n = \frac{(-1)^n}{n} 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

puis $c_n = \frac{(-1)^n 2H_{n-1}}{n}$.

c. Soit $n \geq 2$.

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(- \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \leq 0.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

d. D'après ce qui précède, la suite $\left(2 \frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est à termes positifs et décroissante. De plus $\frac{2H_{n-1}}{n} \sim \frac{2 \ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

D'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{2H_{n-1}}{n}$ converge. i.e. la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ converge.

Exercice 2

1. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge comme série géométrique de raison de module < 1 . Son reste d'ordre n est :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $\sum_{n \geq 0} r_n$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = 2$.

2. a. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante,

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

- b. Par croissance de l'intégrale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N un entier supérieur à 2 et à $N+1$; on somme ces inégalités pour n variant de $n+1$ à N ; on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \quad \text{d'après Chasles} \end{aligned}$$

- c. Puisque :

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^2}$$

et

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt &\leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} &\leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \end{aligned}$$

Puisque la série de riemann, $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

- d. Puisque $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc par comparaison avec la série harmonique, $\sum_{n \geq 1} r_n$ diverge.

3. a. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : en effet elle est alternée et $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant.

- b. i. On a par croissance de l'intégrale :

$$|I_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- ii. On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx \\ &= \left[\ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k dx \\ &= \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-x)^k dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\
&= \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\
&= \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}$$

iii. Puisque $\lim I_n = 0$, on en déduit que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$$

Autrement dit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

D'autre part pour $N > n$, puisque :

$$\int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \left[-\frac{(-x)^k}{k} \right]_0^1 = -\frac{(-1)^k}{k}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n+1}^N -\int_0^1 (-x)^{k-1} dx = -\int_0^1 \sum_{k=n+1}^N (-x)^{k-1} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{(-x)^n - (-x)^N}{1+x} dx = I_N - I_n
\end{aligned}$$

puisque $I_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -I_n$$

c. i. Effectuons une intégration par partie : $\left| \begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{1+x} & u'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} & v'(x) = x^n \end{array} \right|$,

$u, v \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{(1+x)(n+1)} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx
\end{aligned}$$

Remarquons que par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ainsi $a = \mathbf{a.} = 2$.

ii. D'après le critère des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ converge et par comparaison avec une série de Riemann, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r_n$ converge.

iii. Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N r_n &= -\sum_{n=0}^N I_n = -\sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^N (-x)^n dx = -\int_0^1 \frac{1}{1+x} \times \frac{1 - (-x)^{N+1}}{1+x} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{1+x} dx
\end{aligned}$$

mais comme précédemment, $\left| \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = \boxed{-\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n}$$

Probleme 3

Partie A

- La relation $\sim$ est :
 - réflexive car $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A = I_3^{-1}AI_3$ donc $A \sim A$;
 - symétrique car s'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1}BP$, alors $B = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$ et, par conséquent, $A \sim B$ implique $B \sim A$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;
 - transitive : s'il existe P et Q de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $R = QP \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et $A = R^{-1}CR$ donc $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (A \sim B \text{ et } B \sim C) \implies A \sim C$.

On conclut que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Si A et B sont semblables et si P vérifie $A = P^{-1}BP$, alors $\det A = \det P^{-1} \times \det B \times \det P$.
Comme $\det P^{-1} \times \det P = 1$, il vient $\det A = \det B$, ce qui prouve le résultat demandé par contraposée.

- a.** Pour tout $y \in \text{Im } w$, il existe $x \in \text{Ker } u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$. Alors $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ vu que $x \in \text{Ker } u^{i+j}$, d'où $y \in \text{Ker } u^i$. Ceci établit l'inclusion $\text{Im } w \subset \text{Ker } u^i$.

b. Le théorème du rang appliqué à w donne $\dim \text{Ker } u^{i+j} = \dim \text{Im } w + \dim \text{Ker } w$. Or $\dim \text{Im } w \leq \dim \text{Ker } u^i$ d'après l'inclusion obtenue au **a.**, et $\dim \text{Ker } w \leq \dim \text{Ker } u^j$ (étant donné que w est la restriction de u^j à un sous-espace vectoriel de E).

L'inégalité $\dim \text{Ker } u^{i+j} \leq \dim \text{Ker } u^i + \dim \text{Ker } u^j$ en découle alors.

- a.** En appliquant le **3.b.** aux couples $(i, j) = (1, 1)$ et $(2, 1)$, on obtient :

$$\dim \text{Ker } u^2 \leq 2 \dim \text{Ker } u \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker } u^3 \leq \dim \text{Ker } u^2 + \dim \text{Ker } u.$$

Or $\dim \text{Ker } u = 3 - \dim \text{Im } u = 2$ (d'après le théorème du rang) et $\dim \text{Ker } u^3 = 3$ (car $u^3 = 0$).

Les deux inégalités conduisent à $\dim \text{Ker } u^2 \leq 2$ et $\dim \text{Ker } u^2 \geq 2$, et on conclut sur l'égalité.

b. L'existence de a est assurée par le fait que $u^2 \neq 0$.

Pour tous réels α, β, γ , l'égalité $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0$ implique, en composant par u^2 , que $\gamma u^2(a) = 0$ (vu que $u^3(a) = u^4(a) = 0$). Il en résulte $\gamma = 0$ puisque $u^2(a) \neq 0$. En reportant dans l'égalité de départ et en composant par u , on obtient de même $\beta u^2(a) = 0$, d'où $\beta = 0$ et en reportant à nouveau, on montre enfin la nullité de α .

La famille $\mathcal{B}' = (u^2(a), u(a), a)$ est donc libre de cardinal $3 = \dim E$: c'est une base de E .

- c.** – Par définition de la matrice U et de la base $\mathcal{B}'$, on a immédiatement

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice de $u^2 - u$ dans la base $\mathcal{B}'$ étant $U^2 - U$, on en déduit $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a.** L'existence d'un vecteur b tel que $u(b) \neq 0$ est due au fait que $u \neq 0$ (puisque $\text{rang } u = 1$).

b. Comme $u^2 = 0$, le vecteur $u(b)$ appartient à $\text{Ker } u$, de dimension 2 d'après le théorème du rang.

On peut alors compléter le vecteur non nul $u(b)$ en une base $(u(b), c)$ de $\text{Ker } u$ par application du théorème de la base incomplète.

Enfin, b n'appartenant pas à $\text{Ker } u$, la droite vectorielle D qu'il engendre est en somme directe avec le plan vectoriel $\text{Ker } u$ et, par suite, $(b, u(b), c)$ est une base de $D \oplus \text{Ker } u$: cette famille libre de cardinal 3 est ainsi une base de E .

- c.** Par définition de U' et V' , on obtient $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $V' = -U'$.

Partie B

- A et T ayant même déterminant d'après le **2.**, on a $\det A = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

- Un calcul matriciel sans difficulté amène à $N^3 = 0$.

– De plus, $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$ se simplifie en $I_3 - N^3 = I_3$. L'inverse à droite donc l'inverse de $I_3 + N$ est donc $I_3 - N + N^2$, d'où $(P^{-1}AP)^{-1} = I_3 - N + N^2$, ce qui s'écrit encore $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

- Si $N = 0$, alors $P^{-1}AP = I_3$, ce qui conduit rapidement à $A = I_3$, d'où $A^{-1} = A$ et $A \sim A^{-1}$.

- a.** Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ (qu'on notera $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$) est N . De même, soit v l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}(v, \mathcal{B}) = M$.

Comme $u^3 = 0$ et que le rang de u vaut 2, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que

$\text{Mat}(u, \mathcal{B}')$ s'écrit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après le **4.** Ceci entraîne que N et U

sont semblables.

Enfin, comme $\text{Mat}(v, \mathcal{B}') = U^2 - U$, on en déduit que M est semblable à

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. – Pour M^3 , le plus simple consiste à écrire $M^3 = (N(N - I_3))^3 = N^3(N - I_3)^3 = 0$, la deuxième égalité provenant du fait que N et $N - I_3$ commutent.

– Comme M et V sont semblables, ces matrices ont même rang. Celui de V se calcule directement : le premier vecteur colonne est nul et les deux autres non colinéaires, donc $\text{rang } M = \text{rang } V = 2$.

c. Le raisonnement effectué pour N au **a.** s'applique alors aussi à M , qui est ainsi également semblable à V . Par transitivité de $\sim$, on conclut que M et N sont semblables.

d. Si Q est une matrice de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}NQ = N^2 - N$, alors $Q^{-1}(I_3 + N)Q = I_3 + N^2 - N$, ce qui établit que $A \sim I_3 - N + N^2$, d'où $A \sim A^{-1}$ d'après le **7.**

10. Dire que le rang de N vaut 1 signifie que ses deux derniers vecteurs colonnes C_2 et C_3 sont proportionnels, c'est-à-dire que $\alpha = 0$ (si $C_2 = 0$) ou $\gamma = 0$ (si $C_2 \neq 0$).

Le calcul direct de N^2 donne alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $N^2 = 0$.

La question **5.** s'applique donc à l'endomorphisme u de E tel que $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = N$, ce qui s'interprète matriciellement par : $N \sim U'$ et $N^2 - N \sim (-U')$, où U' est la matrice définie au **5.**

Comme $\text{rang}(N^2 - N) = \text{rang}(-U') = 1$ et que $(N^2 - N)^2 = 0$, la matrice $N^2 - N$ est également semblable à U' et, en raisonnant comme au **9.**, on en déduit que A et A^{-1} sont semblables.

11. **a.** $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ayant un rang égal à 1 (matrice non nulle aux colonnes

proportionnelles), le théorème du rang implique que $\dim \text{Ker}(u - id_E) = 3 - 1 = 2$. De plus, les vecteurs non colinéaires a et $b - c$ appartiennent clairement à $\text{Ker}(u - id_E)$ donc $(a, b - c)$ en constitue une base.

b. Pour faire court, on peut dire que $(a, c, b - c)$ est échelonnée par rapport à la base (a, c, b) donc est aussi une base de E , et il en est de même de (e_1, e_2, c) par permutation.

On a directement $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$ par définition de $\text{Ker}(u - id_E)$. De plus, $u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$ donc la matrice de u dans la base (e_1, e_2, c) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice A est alors semblable à une matrice du type T où, avec les notations précédentes, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, -1)$. La question **10.** s'applique : A et A^{-1} sont semblables.

12. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A = A^{-1}$ (donc $A \sim A^{-1}$), mais A n'est pas semblable à une matrice du type T car sinon on aurait $\det A = 1$.