Devoir surveillé de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 3
Samedi 7 décembre
Durée 4 heures

****

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.
Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.
Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 *Étude d'une série produit (d'après CCP L2 2008)*

Si $S_a = \sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $S_b = \sum_{n\geqslant 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle série produit de Cauchy de S_a par S_b la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série produit de $S_\alpha = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même.

1. *Equivalent de la série harmonique*

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, cela définit la série harmonique.

(a) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

(b) Justifier que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(c) Désormais, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à une expression de la forme $\frac{p}{n^q}$ où p et q sont deux réels à déterminer.

(d) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et enfin un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. *Une série produit*

(a) Pour quelles valeurs de α, la série S_α converge-t-elle ?

Jusqu'à la fin de l'exercice, on choisit α de la sorte. On considère $\sum_{n\geqslant 2} c_n$ la série produit de S_α par S_α.

3. Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère $n \geqslant 2$ un entier.

(a) Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto x(n-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que $|c_n| \geqslant \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}$.

(c) Conclure que, pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$ diverge.

4. Désormais, on suppose que $\alpha = 1$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $\frac{1}{x(n-x)} = \frac{a_n}{x} + \frac{b_n}{n-x}$, où a_n et b_n sont deux réels à déterminer.

(b) En déduire une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$.

(c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$.

Exercice 2 *Séries de terme général le reste d'une série convergente.* (D'après CCP PC 2004.)

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0 , r_n son reste de rang n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. On pose pour $n\geqslant 0$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

   Calculer r_n puis montrer que $\sum_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2. On pose pour $n\geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

   Nous allons chercher un équivalent de (r_n).

   Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Montrer que $\forall t \in [k;k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(d) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r_n$?

3. On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(a) Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

(b) Expression intégrale de r_n.

Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

i. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

ii. Montrer que $I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.

iii. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

iv. Exprimer r_n en fonction de I_n.

(c) Conclusion

i. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :
$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 1 \text{ sont à déterminer.}$$

ii. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r_n$.

iii. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

Probleme 3 *Exemples de matrices semblables à leur inverse (D'après Mines d'Albi, 2002 - MPSI)*

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de <u>dimension 3</u>.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que c'est une relation :

- *Réflexive* : $\forall A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}),\ A \sim A$.
- *Symétrique* : $\forall A, B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}),\ A \sim B \implies B \sim A$.
- *Transitive* : $\forall A, B, C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}),\ A \sim B$ et $B \sim C \implies A \sim C$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im} w \subset \ker u^i$.
   (b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leqslant \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg} u = 2$.
   (a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).
   (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   (c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg} u = 1$.
   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   (c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M.
   (b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.
   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
5. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.
   (a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).
   (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
   (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?