Exercice 1

1) Convergence de l'intégrale.

a) On a :

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t) \implies \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

$$\underset{|\sin(t)|\leqslant 1}{\implies} |\sin(t)| \geqslant |\sin(t)|^2 = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Ainsi $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1-\cos(2t)}{2t} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^a \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \int_1^a \frac{1-\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^a \frac{1}{2t}\mathrm{d}t}_{\substack{\text{diverge quand} \\ a\to+\infty}} - \underbrace{\int_1^a \frac{\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t}_{\text{nature ?}}$$

Montrons à l'aide d'une intégration par partie que la dernière intégrale converge lorsque $a \to +\infty$; on pourra alors en déduire la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t$, et donc de $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$.

Procédons à l'intégration par partie : $\left| \begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) & u'(t) = \cos(2t) \\ v(t) = \frac{1}{2t} & v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{array}\right.$; $u, v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

$$\int_1^a \frac{\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\sin(2t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Or $\frac{\sin(2t)}{4t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc le crochet converge quand $a \to +\infty$, et $\frac{\sin(2t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$ et donc l'intégrale converge par comparaison avec une série de Riemann quand $a \longrightarrow +\infty$. La fonction $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) Procédons à l'intégration par partie : $\left| \begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = 1-\cos(t) & v'(t) = \sin(t) \end{array}\right.$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

qui est licite car u, v sont $\mathscr{C}^1$ et le crochet converge vers 0 car $\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
Les deux intégrales ont donc même nature. Or celle de droite converge puisque $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$: $\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est faussement impropre et $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

c) D'après 1.b) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-(1-2\sin^2(t/2))}{t^2}\mathrm{d}t \quad \text{car } \cos(2a) = 1-2\sin^2(a) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On procède au changement de variable $x = t/2$, bijection $\mathscr{C}^1$, $\nearrow$ de $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

2) Calcul de l'intégrale

a) L'application f est deux fois dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x \in]0,\pi]$:

$$f(x) = \frac{2\sin(x/2) - x}{2x\sin(x/2)} \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x/2)}{4\sin^2(x/2)} = \frac{x^2\cos(x/2) - 4\sin^2(x/2)}{4x^2\sin^2(x/2)}$$

Déterminons leur limite en 0 à l'aide d'un DL.

$$\left.\begin{array}{l} 2\sin(x/2) - x \underset{0}{=} o\left(x^2\right) \\ 2x\sin(x/2) \underset{0}{=} x^2 + o(x^2) \end{array}\right\} \implies f(x) \underset{0}{=} \frac{o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\begin{aligned} x^2\cos(x/2) - 4\sin^2(x/2) &\underset{0}{=} x^2\left(1 - \tfrac{x^2}{8} + o(x^3)\right) - 4\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^3}{48} + o(x^4)\right)^2 \\ &\underset{0}{=} x^2 - \tfrac{x^4}{8} + o(x^4) - x^2 + \tfrac{x^4}{12} + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} -\tfrac{x^4}{24} + o(x^4) \\ 4x^2\sin^2(x/2) &\underset{0}{=} 4x^2 \times \left(\tfrac{x}{2} + o(x^2)\right)^2 \\ &\underset{0}{=} x^4 + o(x^4) \\ \implies f'(x) &\underset{0}{=} -\tfrac{1}{24} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\tfrac{1}{24} \end{aligned}$$

ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{24}$.

L'application f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$, et d'après le théorème de limite de la dérivée, puisque $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{24}$ le prolongement obtenu est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Le problème de convergence se pose en 0 ; mais puisque au voisinage de 0^+ l'intégrande est positif et équivalent à :

$$\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} 2n+1$$

l'intégrale est faussement impropre en 0 : d'où l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On calcule :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ &= 2\int_0^\pi \cos((n+1)t)\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\Big]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(I_n)_n$ est constante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = I_0 = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \boxed{\pi}$$

d) Procédons à l'intégration par partie : $\left|\begin{array}{ll} u(x) = g(x) & u'(x) = g'(x) \\ v(x) = -\frac{\cos(Nx)}{N} & v'(x) = \sin(Nx) \end{array}\right.$

u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ par hypothèse.

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\sin(Nx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{N}\left(\Big[-f(x)\cos(Nx)\Big]_a^b + \int_a^b g'(x)\cos(Nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(f(a)\cos(Na) - f(b)\cos(Nb) + \int_a^b g'(x)\cos(Nx)\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

Donc avec l'inégalité triangulaire (version somme + intégrale) et par croissance de l'intégrale, puisque $|\cos(x)| \leqslant 1$:

$$\left|\int_a^b g(x)\sin(Nx)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{N}\left(|f(a| + |f(b)| + \int_a^b |g'(x)|\mathrm{d}x\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e) Puisque f (prolongée) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$, en appliquant d) avec la suite extraite $N = 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient par composition des limites que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} - \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} - \frac{I_n}{2} \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} - \frac{\pi}{2} \qquad \text{d'après b)} \\ \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} &= \frac{\pi}{2} \qquad \text{d'après c)} \end{aligned}$$

f) Effectuons dans cette dernière intégrale le changement de variable $u = \frac{2n+1}{2}t$:

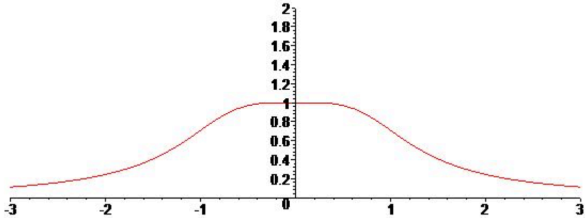
$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} = \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Or puisque $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge (cf. 1.b)), par théorème de composition des limites :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Probleme 2

1. (a) f est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$.



(b) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^3(1+x^4)^{-3/2} \quad \text{et} \\ f''(x) &= -6x^2(1+x^4)^{-3/2} - 2x^3 \times (-3/2) \times 4x^3(1+x^4)^{-5/2} \\ &= 6x^2(x^4-1)(1+x^4)^{-5/2}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \pm 1$: il y a donc deux points d'inflexion de coordonnées $\boxed{(\pm 1, 1/\sqrt{2})}$.

(c) D'après la formule du binome généralisée :

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{(-1/2)\times(-3/2)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)$$

d'où l'on déduit en posant $t = x^4$:

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)}.$$

(d) Puisque f est de classe C^∞ elle possède un DL à l'ordre 8 donné par la formule de Taylor-Young : $f(x) = \sum_{k=0}^{8} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^8)$. Par unicité des coefficients d'un DL on en déduit que :
$\boxed{f^{(4)}(0) = -12,\ f^{(8)}(0) = 3 \times 7! = 15120 \text{ et } f^{(k)}(0) = 0}$ si k n'est pas multiple de 4.

2. (a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante.

(b) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geqslant 0$.

(c) Immédiat puisque $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

3. (a) F est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ (toute fonction continue sur I possède une unique primitive s'annulant en un point a de I).

(b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive et $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge par comparaison en $+\infty$ avec une intégrale de Riemann ; d'où l'existence de α.

(c) On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ qui est bien une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = \int_1^0 \frac{-du}{u^2\sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}.$$

(d) La relation de Chasles donne bien $\alpha = 2F(1)$.

(e) i. $f(n) \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge par la règle de Riemann.

ii. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$ d'où
$\sum_{n=0}^{N} f(n+1) \leqslant \int_0^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n)$ et en faisant tendre N vers $+\infty$: $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ que l'on peut réécrire puisque $f(0) = 1$: $\boxed{\alpha \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant \alpha + 1}$.

Partie II

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$.

2. En posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ on obtient $I_n = \int_{\pi/2}^{0} (\sin u)^n \times (-du) = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n du$.

3. Puisque $\cos t \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$ on a $I_n \geqslant 0$. De plus $I_n = 0$ entrainerait que $\cos t = 0$ sur $[0, \pi/2]$ (cos est continue) ce qui est faux ; donc $I_n > 0$.

4. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n(\cos t - 1)dt \leqslant 0$ car $\cos t \leqslant 1$. La suite (I_n) est donc décroissante, minorée par 0 par suite elle converge.

5. Intégrons par parties pour $n \geqslant 2$:
$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n-1}dt = \left[(\sin t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t) \times (-(n-1)\sin t)(\cos t)^{n-2}dt = (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-(\cos t)^2)(\cos t)^{n-2}dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$.
On en déduit $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

6. $u_n = (n+1)I_{n+1} \times I_n = nI_{n-1}I_n = u_{n-1}$: la suite (u_n) est donc constante d'où $u_n = u_0 = I_1 I_0 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

7. — $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ donc la suite $\dfrac{I_{2n}}{a_n}$ est constante et égale à sa valeur en 0 : $\dfrac{\pi}{2}$.
   — $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1}$ et $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$ d'où $\dfrac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{2n-1}\dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n-1}{2n} = 1$.
   La suite $(2n+1)I_{2n+1}a_n$ est donc constante et égale à sa valeur en 0 : 1.

8. (a) Immédiat puisque la suite (I_n) est décroissante et $I_n > 0$.
   (b) $\dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ a pour limite 1 donc par le théorème d'encadrement $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ aussi. $nI_n^2 = nI_nI_{n-1} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}}$ a donc pour limite $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.
   (c) On en déduit $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

9. (a) De $nI_n^2 \leqslant nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ on tire $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. On en déduit

$$a_n = \frac{2}{\pi}I_{2n} \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

   Puis

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} \geqslant \frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

   (b) $\boxed{a_n = \dfrac{2}{\pi}I_{2n} \sim \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}}$.
   (c) i) $a_n \sim \dfrac{C}{n^{1/2}}$ donc la série $(\sum a_n)$ diverge par la règle de Riemann.
   ii) $\dfrac{a_n}{4n+1} \sim \dfrac{C'}{n^{3/2}}$ donc la série $\left(\sum \dfrac{a_n}{4n+1}\right)$ converge par la règle de Riemann.
   iii) La série $(\sum(-1)^n a_n)$ est alternée car $a_n > 0$. De plus, la suite (a_n) est décroissante et a pour limite 0 donc la série alternée converge.
   iv) La série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right)$ est absolument convergente par le ii).

Partie III

1. (a) F est de classe C^∞ puisque sa dérivée f l'est aussi.
   (b) $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u) \times (-du)$ par le changement de variable $t = -u$. Puisque f est paire on a donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire.
   (d) De $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ on déduit en intégrant sur $[1,x]$: $F(x) - F(1) \leqslant \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \dfrac{1}{x}$.
   (e) Toute fonction croissante et majorée sur $[A, +\infty[$ possède une limite en $+\infty$.
   (f) F est croissante sur $[1, +\infty[$ et y est majorée par $F(1) + 1$ donc elle possède une limite en $+\infty$.

2. (a) Puisque f est continue et possède un DL à l'ordre 8, on peut intégrer terme à terme ce DL pour obtenir le DL de F à l'ordre 9 :

$$\boxed{F(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9)}$$

   (car de plus $F(0) = 0$).
   (b) L'équation de la tangente en 0 est : $\boxed{y = x}$. Comme $F(x) - x \sim -\frac{1}{10}x^5$ quand x tend vers 0 on en déduit que pour $x > 0$ la courbe (C) est au dessous de T alors que pour $x < 0$ elle est au dessus de T.
   (c) $\boxed{F''(x) = f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}}$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$; (C) a donc un unique point d'inflexion, le point O.

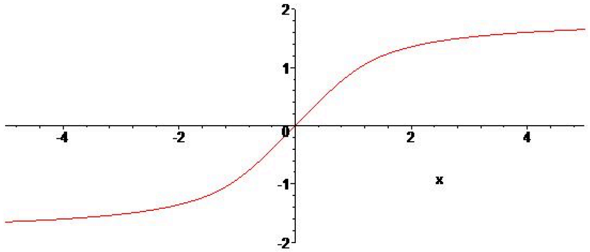
3. (a) Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne

$$\begin{aligned} F(x) - F(1) &= \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \\ &= \int_1^{1/x} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{1+(1/u)^4}} \\ &= \int_{1/x}^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F(1) - F(1/x). \end{aligned}$$

(b) Puisque F est continue la limite en $+\infty$ de $F(1/x)$ est égale à $F(0) = 0$ donc la limite en $+\infty$ de $F(x)$ est égale à $\boxed{2F(1)}$.

(c) On retrouve ainsi le résultat de la question I)3)d) : $\alpha = 2F(1)$.

4. La tangente à (C) au point d'abscisse 1 est : $\boxed{y = \dfrac{x-1}{\sqrt{2}} + F(1)}$. Les droites d'équation $y = \alpha$ et $y = -\alpha$ sont asymptotes à (C).



5. (E) s'écrit $y' + \dfrac{2t^3}{1+t^4} y = \dfrac{1}{1+t^4}$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t^3}{1+t^4}$ est $\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^4)$. En multipliant l'équation par $e^{\varphi(t)} = \sqrt{1+t^4}$ on obtient : $(y\sqrt{1+t^4})' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ d'où $y\sqrt{1+t^4} = F(t) + C$ et donc $y = \dfrac{F(t)+C}{\sqrt{1+t^4}}$.