

Devoir surveillé de Mathématiques n° 2
Samedi 9 novembre
Durée 4 heures

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.

Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 Convergence et calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est appelée *intégrale de Dirichlet*. Nous allons établir sa convergence et effectuer son calcul.

1) Convergence de l'intégrale de Dirichlet.

- a) Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra établir que $|\sin(t)| \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2}$).
- b) Démontrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ a même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$; en déduire qu'elle converge (on ne demande pas de la calculer).
- c) Prouver que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$

2) Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

a) Soit :

$$\begin{aligned} f :]0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(x/2)} \end{aligned}$$

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On notera encore f ce prolongement.

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$. Justifier de l'existence de I_n .
- c) Calculer $I_{n+1} - I_n$, et en déduire I_n .
- d) Montrer que si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(Nx) dx = 0$$

(on pourra procéder à une intégration par partie).

- e) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0$ puis la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} dt$.
- f) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Probleme 2 Extrait de E3A - PC - 2011

Les trois parties sont très largement indépendantes.

Dans tout le problème :

- f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
- F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- $\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires.

1) Etude de f :

- a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative (C_f) .
- b) (C_f) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.
- c) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f .
- d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{1, \dots, 8\}$. Enoncer avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).

2) Etude de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- b) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.
- 3) Etude d'une intégrale impropre :
- a) Justifier l'existence de F . Enoncer avec précision le théorème utilisé.
- b) Justifier l'existence de α .
- c) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).
- d) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.
- e) i. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.
- ii. Montrer que $\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha + 1$

Partie II : Intégrales de Wallis.

Dans cette partie si $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
- 4) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.
- 5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par parties).
- 6) Montrer que la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).
- 7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2} a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.
- 8) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.
- b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2 .
- c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
- 9) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.
- b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.
- c) Donner la nature des séries de terme général :
- a_n
 - $\frac{a_n}{4n+1}$
 - $(-1)^n a_n$
 - $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$

Partie III : Etude de F .

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan.

- 1) Etude globale de F
- a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- b) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
- c) Montrer que F est impaire.
- d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq 1 - \frac{1}{x}$.
- e) Enoncer le théorème concernant l'existence de la limite en $+\infty$ d'une fonction croissante définie sur $[A, +\infty[$ (où $A \in \mathbb{R}$).

- f) Dédurre des 2 questions précédentes que F a une limite finie en $+\infty$.
- 2) Etude locale de F
- a) Donner le développement limité de F en 0 à l'ordre 9 . Enoncer le théorème utilisé.
 - b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0 .
 - c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.
- 3) Lien avec α
- a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - b) En déduire que la limite de F en $+\infty$ est égale à $2F(1)$.
 - c) En utilisant la partie I)3), montrer que la limite de F en $+\infty$ est α et retrouver le résultat de III)3)b).
- 4) Tracé de (C) :
- a) Dresser le tableau de variations de F .
 - b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
 - c) Tracer (C) en tenant compte des différents points de l'étude précédente. Pour le tracé, prendre $\alpha \approx 1.85$.
- 5) Une application de F :
- Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1 + t^4) y' + 2t^3 y = 1$.