Exercice 1

a)

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n\left(n^{\frac{1}{n!}}-1\right) \\ &= 2^n\Big(\exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n!}\ln(n)}_{\longrightarrow 0}\Big)-1\Big) \\ &\sim 2^n\frac{1}{n!}\ln(n) \\ &\sim 2\times\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\times\frac{\ln(n)}{n}\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

par croissances comparées.

b)

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \ln\Big(1+\underbrace{\cos\frac{2}{\sqrt{n}}-1}_{\longrightarrow 0}\Big)\sim\cos\frac{2}{\sqrt{n}}-1\sim-\frac{2}{n}\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} w_n &= \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)-\exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\times\Big(1-\exp\Big(\underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n^2}}_{\longrightarrow 0}\Big)\Big) \\ &\sim \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{n^2}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{n^2}-1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\times\left(\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\sim \frac{3}{2n^2}\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{3}{2n^2}\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Exercice 2

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $f_n'(x)=e^x+2nx>0$.
   Ainsi f_n est strictement croissante. D'où le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0	$+\infty$
f_n	-2 ↗	$+\infty$

   En particulier, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution, et par stricte monotonie, cette solution est unique.

2. Comparons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$:

$$f_{n+1}(x_n)=e^{x_n}+(n+1)x_n^2-3=f_n(x_n)+x_n=x_n\geqslant=0=f_{n+1}(x_{n+1})$$

   Puisque f_{n+1} est strictement croissante, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\geqslant x_{n+1}$; la suite (x_n) est décroissante.

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. Soit ℓ sa limite ; puisque $x_n\geqslant 0$, nécessairement $\ell\geqslant 0$.

4. Montrons que $\ell=0$; par l'absurde, supposons que $\ell>0$; alors par somme et produit des limites :

$$\forall n\in\mathbb{N}, e^{x_n}+nx_n^2=3 \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^{x_n}+nx_n^2\longrightarrow+\infty \\ 3\longrightarrow 3 \end{cases}$$

   C'est contradictoire. Ainsi $\ell=0$.

5. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$n\times x_n^2=3-e^{x_n}\implies\frac{n}{2}\times x_n^2=\frac{3-e^{x_n}}{2}\longrightarrow 1$$

   puisque par composition des limites, $x_n\longrightarrow 0\implies e^{x_n}\longrightarrow e^0=1$.
   Toujours par composition des limites, et puisque $x_n>0$:

$$\sqrt{\frac{n}{2}\times x_n^2}=\sqrt{\frac{n}{2}}\times x_n\longrightarrow 1\implies\boxed{x_n\sim\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

Problème 3

1. a) L'application $f : x \mapsto x - \sin^2 x$ est strictement croissante (dérivée positive ($\geqslant 0$), et nulle seulement en $\pi/4$ et $5\pi/4$), et de plus $f(x) \leqslant x$ pour tout x. Par ailleurs, la croissance de f nous assure que les intervalles $[0;\pi]$ et $[\pi;2\pi]$ sont stables puisque $0, \pi$ et 2π sont points fixes de f.

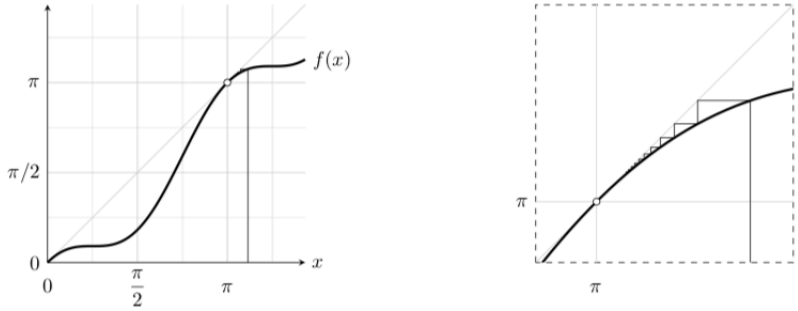

Figure 1 : Le graphe en escalier associé à la fonction f.
À gauche : le graphe global. L'escalier est à peine visible.
À droite : un agrandissement, suggérant fortement la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers π.

b) u_0 est dans l'intervalle $[\ \pi;2\pi\ [$ qui est stable par f, donc tous les u_n sont dans cet intervalle (par une récurrence immédiate). Sur tout cet intervalle on a $f(x) \leqslant x$, donc $f(u_n) \leqslant u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u est donc décroissante et minorée par π, donc converge - mais on ne sait pas encore vers quoi : notons ℓ la limite de la suite u. La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ fournit (passage à la limite, grâce à la continuité de f) : $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\sin^2 \ell = 0$, donc ℓ est de la forme $k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais l'encadrement $\pi \leqslant u_n \leqslant u_0$ permet de " passer à la limite $n \to \infty$ ", ce qui permet de conclure que $\pi \leqslant \ell \leqslant u_0 < 2\pi$, et ainsi :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

c) Par exemple :

```
import numpy as np
def f(x):
    return x - np.sin(x)**2
def F(x, n):
    u = x
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

Permettrait d'obtenir par exemple :

```
>>> F(3.5,10)
3.210484821
>>> F(3.5,100)
3.1509806249188443
```

On pourrait se demander si ça converge bien vers π (si on disposait d'un ordinateur ; et ce n'était pas demandé) :

```
>>> for i in range(6):
        print(F(3.5,10**i)-np.pi)

0.23535847358185924
0.06889216747841287
0.009387971329051226
0.0009913073648850634
9.988948259165298 e-05
9.9986636192817 e-06
```

La convergence semble lente : $u_n - \ell$ semble être de l'ordre de (et même équivalent à) $\frac{1}{n}$.

d) Sans problème :

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} = u_{n+1} - \pi = u_n - \sin^2 u_n - \pi &= \pi + \delta_n - \sin^2(\pi + \delta_n) - \pi \\ &= \delta_n - \sin^2 \delta_n\end{aligned}$$

e) $\sin^2 \delta_n \sim \delta_n^2 = o(\delta_n)$, donc $\delta_{n+1} \sim \delta_n$. On écrit ensuite :

$$\frac{1}{\delta_{n+1}} - \frac{1}{\delta_n} = \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{\delta_n \delta_{n+1}} \sim \frac{\sin^2 \delta_n}{\delta_n^2} \sim 1$$

et c'est gagné :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\delta_{n+1}} - \frac{1}{\delta_n} \right) = 1$$

En appliquant le théorème de Cesàro à $\alpha_n = \frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{\delta_{n-1}}$, on obtient $\frac{\frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{\delta_0}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$, donc $\frac{1}{n\delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$, puis, comme intuité précédemment :

$$\delta_n \sim \frac{1}{n}$$

f) La concavité de la fonction sinus sur $[0;\pi/2]$ nous assure que les cordes de son graphe sont situées sous le graphe, et c'est même strict à l'exclusion des bords.

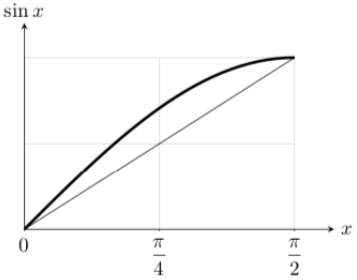

Figure 2 : Inégalité de concavité stricte : pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$ $\quad \sin x > \frac{2}{\pi}x$

On peut aussi procéder sans faire appel à la convexité :
2ème méthode : (étude des variations). On pose $\varphi(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$.
Puisque pour $x \in [0,\pi/2], \varphi''(x) = -\sin x \leqslant 0, \varphi'$ est décroissante s'annulant par Rolle entre 0 et $\pi/2$ (puisque $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$), et donc φ est croissante puis décroissante en partant de 0 et en revenant à 0 . Ainsi,

$$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi} \text{ pour tout } x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

g) Tout d'abord, $\delta_{n+1} = \delta_n - \sin^2\delta_n \leqslant \delta_n$, de sorte que

$$\frac{1}{\delta_{n+1}} - \frac{1}{\delta_n} = \frac{\sin^2\delta_n}{\delta_n\delta_{n+1}} \geqslant \frac{\sin^2\delta_n}{\delta_n^2} \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

en appliquant la minoration de la question précédente puisque $0 < \delta_n \leqslant \delta_0 < \frac{\pi}{2}$.
Changeons n en k dans l'inégalité précédente, et sommons pour k allant de 0 à $n-1$. On obtient alors : $\frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{\delta_0} \geqslant n\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$, puis $\frac{1}{\delta_n} \geqslant n\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ et enfin

$$\delta_n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{n}$$

h) D'après l'inégalité précédente (et sachant que $\delta_n \geqslant 0$), pour avoir $|\delta_n| \leqslant \frac{1}{10^{20}}$, il suffit d'avoir $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10^{20}}$, c'est-à-dire $n \geqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 10^{20}$. Même pour un très gros ordinateur, ça commence à faire beaucoup de calculs (lire : c'est complètement déraisonnable). On ne peut même pas partager le travail entre plusieurs ordinateurs puisque ces calculs doivent être faits séquentiellement...

2. a) On peut par exemple montrer par récurrence quasi immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant b_n$, avec $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$.
On en déduit les caractères croissant et décroissant de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et c'est gagné, puisque $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Notons ℓ leur limite commune.
Par construction, on a toujours $\sin(a_n) > 0$ et $\sin(b_n) \leqslant 0$. En passant ces inégalités à la limite, on obtient $\sin(\ell) = 0$, donc ℓ est de la forme $k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais tout ce petit monde est encadré par 3 et 4 , donc la limite aussi, et cette dernière vaut donc π.
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et convergent vers $\ell = \pi$.

b) Dans le programme suivant, le paramètre affichage est un booléen que l'on fixe à True si on veut voir les étapes intermédiaires, ce qui est à la fois intéressant pour de petites valeurs de n, et déconseillé pour de grandes !

```
def a_et_b(n, affichage):
    a = 3.
    b = 4.
    for k in range(n):
        c = (a + b) / 2
        if sin(c) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
        if affichage:
            print("Etape", k + 1, ": a=", a, "** b=", b)
    return((a + b) / 2)
```

Par exemple : `a\_et\_b(10,False)` et `a\_et\_b(100,False)` donnent respectivement les valeurs

$$c_{10} = 3,141113281 \quad \text{et} \quad c_{100} = 3,141592653$$

c) c_n et π sont dans le segment $[a_n;b_n]$, donc

$$|c_n - \pi| \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

La convergence est donc extrêmement rapide : plus rapide que toute puissance de $1/n$ notamment.

d) D'après ce qui précède, pour avoir $|c_n - \ell| \leqslant \frac{1}{10^{20}}$, il suffit d'avoir $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{10^{20}}$, c'est à dire $n \geqslant 20\frac{\ln 10}{\ln 2}$, soit encore, en demandant gentiment à PYTHON : `20 * log (10) / log (2)` : 66.43856189774726.
Toute valeur $n \geqslant 67$ est suffisante pour assurer l'inégalité voulue.

Problème 4

1. La tangente en $x = u_n$ a pour équation :

$$y = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$$

Lorsque $f'(u_n) \neq 0$, c'est une droite non parallèle à l'axe $[O, x)$, elle l'intersecte donc au point d'abscisse u_{n+1} vérifiant :

$$0 = f(u_n) + f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) \implies u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

2. a) Par récurrence avec pour proposition de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et strictement positif".
Initialisation : $u_0 = a$ est bien défini et > 0.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Ainsi u_n existe et $u_n > 0$; alors

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^q - a}{qu_n^{q-1}} = \frac{(q-1)u_n^q + a}{qu_n^{q-1}}$$

existe et $u_{n+1} > 0$ par hypothèse de récurrence et puisque $q > 1$ et $a > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : la suite (u_n) est bien définie et à termes tous > 0.

b) Comme vu dans la question précédente, $u_n > 0$ et :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^q - a}{qu_n^{q-1}} = \frac{(q-1)u_n^q + a}{qu_n^{q-1}} = f(u_n)$$

La fonction f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{q(q-1)x^{q-1} \times qx^{q-1} - (q-1)x^q \times q(q-1)x^{q-2} - a \times q(q-1)x^{q-2}}{q^2x^{2q-2}} \\ &= \frac{q(q-1)x^{2q-2} \times (q - (q-1)) - a \times q(q-1)x^{q-2}}{q^2x^{2q-2}} \\ &= \frac{q-1}{q} - a \times \frac{q-1}{qx^q} = \boxed{\frac{q-1}{q} \times \left(1 - \frac{a}{x^q}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt[q]{a}}$. Puisque d'autre part :

$$f\left(\sqrt[q]{a}\right) = \frac{(q-1)a + a}{q\frac{a}{\sqrt[q]{a}}} = \sqrt[q]{a} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt[q]{a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[q]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Puisque d'après son tableau de variation, f prend sur $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[q]{a}$ comme valeur minimale, et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, on a bien : $u_{n+1} \geqslant \sqrt[q]{a}$.

(b) Ainsi tous les termes de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ sont dans l'intervalle $[\sqrt[q]{a}, +\infty[$ sur lequel la fonction de récurrence f est croissante, la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et donc monotone. De plus pour tout $x \in [\sqrt[q]{a}, +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{(q-1)x^q + a}{qx^{q-1}} - x = \frac{a - x^q}{qx^{q-1}} \leqslant 0$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

(c) Elle est décroissante et minorée par $\sqrt[q]{a}$, et donc (T.L.M.) convergente vers $\ell \geqslant \sqrt[q]{a} > 0$. Il en est donc de même de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminons sa limite, en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{(q-1)u_n^q + a}{qu_n^{q-1}} \underset{\ell \neq 0}{\implies} \ell \times q\ell^{q-1} = (q-1)\ell^q + a \implies \ell^q = a \underset{\ell \geqslant 0}{\implies} \ell = \sqrt[q]{a}$$

Ainsi, comme attendu, la suite (u_n) converge vers $\sqrt[q]{a}$.

(d) Code python :

```
def racine(a,q,e):
    if a == 0:
        return 0
    assert e**q < a:                # assure la terminaison
    x = (q-1)*a/q + 1/q/a**(q-2)  # x = u1
    while ((x-e)**q-a)*((x+e)**q-a) > 0:
        x = ((q-1)*x**q+a)/q/x**(q-1)       # terme suivant
    return x
```

Terminaison et correction du programme s'obtiennent par le même argument qu'en I.8.

4. a) Soit $P(X) = (q-1)X^q - q\sqrt[q]{a}X^{q-1} + a$; ainsi :

$$P'(X) = q(q-1)X^{q-1} - q(q-1)\sqrt[q]{a}X^{q-2} = q(q-1)X^{q-2}\left(X - \sqrt[q]{a}\right)$$

Ainsi 0 et $\sqrt[q]{a}$ sont les seules racines de $P'(X)$.

b) Vérifions que $\sqrt[q]{a}$ est une racine de $P(X)$:

$$P(\sqrt[q]{a}) = (q-1)a - qa + a = 0$$

C'est donc une racine de $P(X)$ et de $P'(X)$, donc une racine de $P(X)$ d'ordre de multiplicité au moins 2.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt[q]{a} = \frac{(q-1)u_n^q + a}{qu_n^{q-1}} - \sqrt[q]{a} = \frac{(q-1)u_n^q - q\sqrt[q]{a}\,u_n^{q-1} + a}{qu_n^{q-1}} = \frac{P(u_n)}{qu_n^{q-1}}$$

d) Puisque $P(X)$ admet pour racine de multiplicité $\geqslant 2$, $\sqrt[q]{a}$, il se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en :

$$P(X) = \left(x - \sqrt[q]{a}\right)^2 \times Q(X)$$

où $Q(X)$ est un polynôme (de degré $q-2$).Ainsi :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}\right| = \left|\frac{Q(u_n)}{qu_n^{q-1}}\right| \times \left|u_n - \sqrt[q]{a}\right|^2$$

et la suite $\dfrac{Q(u_n)}{qu_n^{q-1}}$ convergeant vers $\dfrac{Q(\sqrt[q]{a})}{q\sqrt[q]{a}^{q-1}}$, par composition des limites, elle est bornée. D'où l'existence de $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant K \times \left|u_n - \sqrt[q]{a}\right|^2$$

e) Considérons deux cas selon que $K \leqslant 1$ ou $K > 1$.

Premier cas : $K \leqslant 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}| \leqslant |u_n - \sqrt[q]{a}|^2$. Mais puisque $u_n \longrightarrow \sqrt[q]{a}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \sqrt[q]{a}| \leqslant \frac{1}{2}$. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|u_n - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|$$

L'initialisation est claire. Hérédité. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant \left|u_n - \sqrt[q]{a}\right|^2 &\underset{(HR)}{\leqslant} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|\right)^2 \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|^2 \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. En posant $C = \dfrac{|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}|}{2^{n_0}}$ on a donc l'existence d'une constante C et d'un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|u_n - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Autrement dit $u_n - \sqrt[q]{a} = O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$.

Deuxième cas : si $K > 1$. Puisque $u_n \longrightarrow \sqrt[q]{a}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \sqrt[q]{a}| \leqslant \frac{1}{2K}$. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|u_n - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|$$

L'initialisation est claire.
Hérédité. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant K \times \left|u_n - \sqrt[q]{a}\right|^2 &\underset{(HR)}{\leqslant} K\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|\right)^2 \\ &\leqslant K\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|^2 \\ &\leqslant K \times \frac{1}{2K} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}} \left|u_{n_0} - \sqrt[q]{a}\right|\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, on obtient donc $u_n - \sqrt[q]{a} = O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$.

f) La rapidité de convergence est phénoménale ! Car "exponentiellement plus rapide" qu'une convergence exponentielle (=géométrique), par croissance comparée de n et de 2^n.

Remarque. On appelle cela une "convergence quadratique". On ne connait pas d'algorithme plus rapide. Informellement, le nombre de décimales correctes double à chaque itération : 1, 2, 4, 8, 16, 32,... en une poignée d'itérations, chacune très peu couteuse en temps de calcul.