PC ENCPB 2024/25

Devoir surveillé de Mathématiques n° 1
Samedi 5 octobre
Durée 4 heures

****

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.
Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.
Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1

Déterminer un équivalent, le plus simple possible, puis en déduire la limite de :

a) $u_n = 2^n \left(n^{\frac{1}{n!}} - 1\right)$ b) $v_n = \ln\left(\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ c) $w_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$

Exercice 2

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

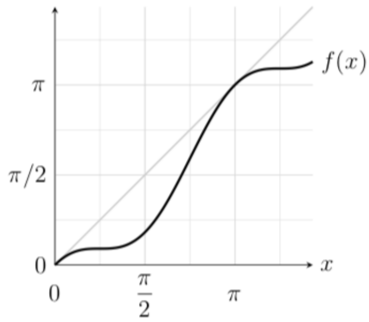
On note x_n la solution de $f_n(x) = 0$. Cela définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. En déduire que (x_n) converge.
4. Montrer que $\lim x_n = 0$.
5. Montrer que $x_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Problème 3 . *Comparaison de vitesse de convergence*

Ce problème a pour objet l'étude comparée de deux vitesses de convergence de suites. Pour chacune des deux études, on établira une convergence de suite et on évaluera la vitesse de convergence.

1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in [\pi, 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \sin^2 u_n$. Voici le graphe partiel de la fonction f :



a) Étudier rapidement $f : x \mapsto x - \sin^2 x$ sur $[0; 2\pi]$. Faire un dessin et observer le comportement de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

c) Donner un programme écrit en python permettant de calculer u_n.

d) Donnons un équivalent de $\delta_n = u_n - \ell$ (qui reste strictement positif, et en particulier non nul).
Exprimer δ_{n+1} à l'aide de δ_n.

e) Vérifier que $\delta_{n+1} \sim \delta_n$, puis que $\frac{1}{\delta_{n+1}} - \frac{1}{\delta_n}$ admet une limite que l'on déterminera.

f) On rappelle le théorème de Cesàro :

$$\text{" si } \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \underset{n\to\infty}{} \ell.\text{"}$$

En utilisant ce résultat et la question précédente, obtenir un équivalent simple de δ_n quand n tend vers l'infini.

g) On va maintenant majorer explicitement δ_n.
Montrer que si $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, alors $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x}$.
On supposera dans les deux questions suivantes h) et i) que $u_0 \in]\pi, 3\pi/2]$.

h) Montrer que $\frac{1}{\delta_{n+1}} - \frac{1}{\delta_n} \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$; en déduire une minoration de $\frac{1}{\delta_n}$ puis une majoration de δ_n.

i) À partir de quel rang est-on assuré d'avoir $|\delta_n| \leqslant \frac{1}{10^{20}}$? Cela vous semble-t-il faisable avec votre calculatrice ? Et avec un très gros ordinateur ?

2. On construit ici deux suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = 3, b_0 = 4$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— si $\sin\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
— si $\sin\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On définit enfin $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

a) Montrer que les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et déterminer la valeur ℓ de la limite.

b) Écrire un programme Python calculant a_n, b_n et c_n.

c) Montrer que, pour tout $\alpha > 0, c_n - \ell = \mathrm{o}\left(1/n^\alpha\right)$ à l'aide d'une majoration explicite de $|c_n - \ell|$.

d) À partir de quel rang est-on assuré d'avoir $|c_n - \ell| \leqslant \frac{1}{10^{20}}$? (on donnera une méthode de calcul)

Problème 4 . *Méthode de Newton pour l'extraction d'une racine q-ième (XVII^e siècle)*

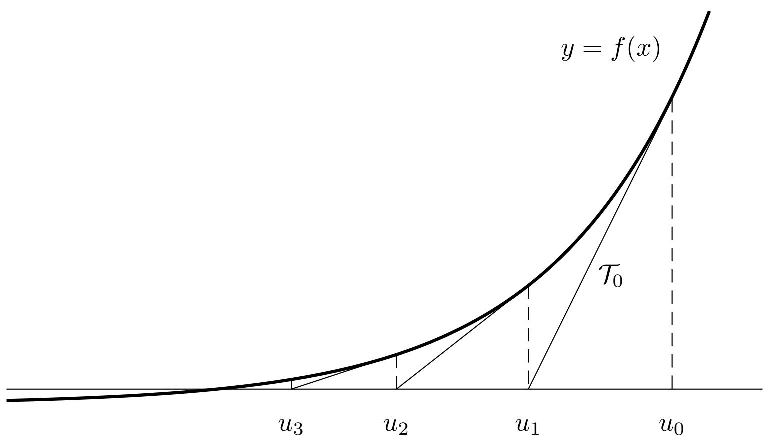
On rappelle que pour un réel $a > 0$, $\sqrt[q]{a}$ est défini comme l'unique réel $x > 0$ vérifiant $x^q = a$. Donné a, le calcul (approché) de $\sqrt[q]{a}$ s'appelle *extraction d'une racine q-ième de a*.

Les résultats établis dans ce problème fournissent des méthodes efficaces utilisées par les ordinateurs et les machines à calculer pour extraire une racine q-ième, c'est à dire pour calculer une valeur approchée de la racine q-ème : $\sqrt[q]{}$ d'un nombre.

La méthode de Newton (ou de Newton-Raphson) est une méthode célèbre et très efficace pour la résolution approchée d'une équation $f(x) = 0$. Elle construit une suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Elle s'interprète géométriquement à l'aide du graphe de f et de ses tangentes. Le terme u_{n+1} s'obtient de u_n en menant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n. Lorsque la tangente existe et est non horizontale, c'est à dire lorsque $f'(u_n) \neq 0$, elle intersecte l'axe des abscisses en un seul point, et u_{n+1} est l'abscisse de cette intersection.



On peut montrer que sous des hypothèses suffisantes, la suite (u_n) sera bien définie et convergente vers une racine de f.

1. Soit f dérivable en un réel u_n ; donner l'équation de la droite tangente $\mathcal{T}_n$ à la courbe de f au point d'abscisse u_n, et retrouver que lorsque $f'(u_n) \neq 0$, $\mathcal{T}_n$ intersecte l'axe des abscisses au point d'abscisse $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Le but de cette partie, est d'appliquer cette méthode à l'extraction d'une racine q-ième, d'établir sa convergence, et sa vitesse de convergence, pour en déduire un algorithme efficace d'extraction d'une racine q-ième.

Dans toute la suite on considère un entier $q > 1$ et un réel $a > 0$ fixés. On considère aussi l'application :

$$f_q : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow x^q - a \end{array}$$

2. Dresser le tableau de variation de f_q. En déduire que l'équation $f_q(x) = 0$ a une unique solution.
Cette solution est appelée la racine q-ième de a et est notée $\sqrt[q]{a}$.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(u_n) \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \alpha > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f_q(u_n)}{f_q'(u_n)} \end{array} \right.$$

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à termes tous strictement positifs.

   Soit :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{(q-1)\,x^q + a}{q\,x^{q-1}} \end{array}$$

   (a) Montrer que $(u_n)_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et établir le tableau de variation de f.

4. Monotonie et convergence de la suite $(u_n)_n$.
   (a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt[q]{a}$.
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   (d) Ecrire en `python` une fonction `racine(a,q,e)` prenant en paramètre un float $a \geqslant 0$, un entier $q \in \mathbb{N}$, et un float e et qui retourne une valeur approchée de $\sqrt[q]{a}$ à e près (lorsque e est suffisamment petit comparativement à $\sqrt[q]{a}$). On pourra s'inspirer de l'approche effectuée en I.8.

5. Vitesse de convergence de la suite $(u_n)_n$

   On considère le polynôme $P(X) = (q-1)\,X^q - q\,\sqrt[q]{(a)}\,X^{q-1} + a$.
   (a) Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ son polynôme dérivée $P'(X)$ et en déduire toutes les racines du polynôme dérivé $P'(X)$.
   (b) Montrer que $\sqrt[q]{a}$ est une racine du polynôme $P(X)$ d'ordre de multiplicité au moins 2.
   (c) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que :
$$u_{n+1} - \sqrt[q]{a} = \frac{P(u_n)}{q\,{u_n}^{q-1}}$$
   (d) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ tel que pour tout n :
$$\left|u_{n+1} - \sqrt[q]{a}\right| \leqslant K \times \left|u_n - \sqrt[q]{a}\right|^2$$
   (e) En déduire qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que $(u_n - \sqrt[q]{a}) = O\left(p^{2^n}\right)$.
   (f) Informellement, que pensez-vous de la vitesse de convergence de (u_n) vers sa limite ?