DM 6 2024-25

Correction

Q1. Il faut avoir fait au moins 2 tirages pour observer un numéro déjà tiré précédemment, et au $n+1$-ème tirage, la boule tirée aura nécessairement été déjà tirée : $T_n = [\![2, n+1]\!]$.

Q2. On a $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]^k$.

Soit $(a_1, \cdots, a_k) \in [\![1, n]\!]^k$. On a par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(Z = (a_1, \cdots, a_k)) = \mathbb{P}(X_1 = a_1, \cdots, X_k = a_k) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_j = a_j) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}$$

Donc Z suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^k$.

Q3. On a $\mathrm{Card}(A) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (nombre de k-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments).

cours sur le dénombrement (PCSI)

Explication rapide : n choix pour a_1 puis $n-1$ choix pour a_2 tel que $a_1 \neq a_2$, puis $n-2$ choix pour a_3 ....

Les évènements $(T_n > k)$ et $(Z \in A)$ sont clairement égaux :

si $T_n > k$ alors les k premiers tirages donnent des numéros 2 à 2 distincts donc $Z \in A$

si $Z \in A$, alors les k premiers tirages donnent des numéros 2 à 2 distincts donc $T_n > k$.

Donc $\mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(Z \in A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}\left([\![1, n]\!]^k\right)} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\dfrac{1}{n^k}$.

Q4. T_n est d'espérance finie car T_n est une variable aléatoire bornée (et même à support fini).

On a pour $k \geqslant n+1$, $\mathbb{P}(T_n > k) = 0$ car $T_n \leqslant n+1$, par conséquent la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(T_n > k)$ est convergente et d'après le cours :

$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k)$

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}$$

Q5. L'application $f_k : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue (et positive) sur $[0, +\infty[$.

exemple très classique à connaître

De plus par croissance comparée $\lim_{t \to +\infty} t^2 f_k(t) = \lim_{t \to +\infty} t^{k+2} e^{-t} = 0$ donc $f_k(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_k est intégrable en $+\infty$ et par conséquent l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque : on peut aussi conclure en remarquant que $f_k(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$.

Q6. On procède par récurrence sur k :

exemple très classique à connaître

- *initialisation* $k = 0$. $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$.
- *hérédité* soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $I_k = k!$.

  On pose $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$; alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v'(t) = e^{-t}$.

  Par croissance comparée $\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \to +\infty} -t^{k+1}e^{-t} = 0$, et $u(0)v(0) = 0$; on peut donc procéder à l'intégration par parties suivante :

  rédaction intégration par parties

  $$I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -(k+1)t^k e^{-t} dt = (k+1) I_k \underset{H.R.}{=} (k+1)!$$

  en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la dernière égalité.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q7. L'application $g_n = t \mapsto \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$

$\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^n}t^n$ donc $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\,(t^n e^{-t})$ or l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

on aurait pu rédiger la convergence par somme d'intégrales convergentes

Et par la formule du binôme de Newton et linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\underbrace{I_k}_{=k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} \underset{Q28}{=} \mathbb{E}(T_n)$$

Q8. On effectue le changement de variable usuel $v = t-n$:

$$J_n = \int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{v+n}{n}\right)^n e^{-v-n}\mathrm{d}v = e^{-n}\int_0^{+\infty}\left(2+\frac{v}{n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v$$

je considère (à tort ?) le changement de variables tellement simple que je ne vérifie pas les hypothèses : classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone donc bijective de I sur J

Q9. En utilisant pour $v \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $1+\frac{v}{2n} \leqslant e^{\frac{v}{2n}}$:

$$0 \leqslant \left(1+\tfrac{v}{2n}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{v}{2n}}\right)^n = e^{\frac{v}{2}}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v \leqslant \int_0^{+\infty} e^{\frac{v}{2}}e^{-v}\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-v}{2}}\mathrm{d}v = 2 \text{ donc } 0 \leqslant K_n \leqslant 2$$

Q10. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la question 32 :

$$J_n = e^{-n}\int_0^{+\infty}\left(2+\frac{v}{n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v = e^{-n}2^n\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\mathrm{d}v = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n$$

Or $0 < \frac{2}{e} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$ et (K_n) étant bornée d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n K_n = 0$$

Remarque : on peut rédiger en écrivant l'encadrement, $0 \leqslant J_n \leqslant 2\left(\frac{2}{e}\right)^n$, obtenu à partir de la question précédente, puis invoquer le théorème des gendarmes.

Q11. En effectuant le changement de variable $t = u\sqrt{n}$,

$$I_n = \int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}\sqrt{n}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Et par la relation de Chasles

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\underbrace{f_n(u)}_{=0}\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

D'où

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} f_n(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Q12. Soit $u \in]0,\sqrt{n}[$. Le développement en série entière de $\ln(1+x)$ s'écrit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

En particulier pour $x = \frac{u}{\sqrt{n}} \in]0,1[$,

$$\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}}}$$

Donc

$$\ln(f_n(u)) = n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} - u\sqrt{n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$$

Q13. Soit $u \in]0, \sqrt{n}[$. Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = \dfrac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}} = \dfrac{n}{k}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^k$.

il fallait penser à la majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial

La suite $(V_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle car $0 \leqslant \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$ et :

- $V_{k+1} = \dfrac{n}{k+1}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^{k+1} \leqslant \dfrac{n}{k}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = V_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{n}{k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = 0$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}V_k$ est une série alternée vérifiant le critère spécial ; on a donc par majoration du reste :

$$\left|\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2}\right| = \left|\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k-1}V_k\right| \leqslant |V_3| = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$$

la seconde inégalité est une simple conséquence de la première

Par conséquent, en utilisant $\frac{u}{\sqrt{n}} \leqslant 1$,

$$\ln(f_n(u)) \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2} = u^2\left(\frac{u}{3\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\right) \leqslant u^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{-u^2}{6}$$

Q14. On applique le théorème de convergence dominée :

- soit $u \in]0, +\infty[$, en utilisant le développement $\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$f_n(u) \underset{\sqrt{n}>u}{=} e^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}} = e^{-\frac{u^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $u \mapsto e^{\frac{-u^2}{2}}$ sur $]0, +\infty[$;

- pour tout $u \in]0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente pour le cas $u < \sqrt{n}$:

$$\begin{cases} |f_n(u)| = f_n(u) \leqslant e^{\frac{-u^2}{6}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ |f_n(u)| = f_n(u) = 0 & \text{si } u \geqslant \sqrt{n} \end{cases} \quad \text{donc} \quad |f_n(u)| \leqslant e^{\frac{-u^2}{6}}$$

et $u \mapsto e^{\frac{-u^2}{6}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $e^{\frac{-u^2}{6}} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(e^{-u}\right)$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(u)\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

Q15. Par la question 31, et la définition de I_n et J_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_n) = I_n + J_n$$

De plus d'après les questions Q35 et Q38,

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

De plus, d'après la question 34, $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$, donc $J_n \underset{n \to +\infty}{=} o\,(I_n)$ donc

$$\mathbb{E}(T_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$