

Exercice 1 Exercice 1 du chapitre 13.

Il s'avère que la famille (e_1, e_2) est une base orthonormale de F . Il suffit donc d'appliquer les formules de projection orthogonale : soit $u = (x, y, z, t)$,

$$\begin{aligned} p_F(u) &= \langle u | e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle u | e_2 \rangle \cdot e_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x - y - z + t) \cdot e_1 + \frac{1}{2} \cdot (x + y + z + t) \cdot e_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2x + 2t, 2y + 2z, 2y + 2z, 2x + 2t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_F((1, 0, 0, 0)) &= \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0, 1) \\ p_F((0, 1, 0, 0)) &= \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1, 0) \\ p_F((0, 0, 1, 0)) &= \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1, 0) \\ p_F((0, 0, 0, 1)) &= \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{Mat}(p_F) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Exercice 2 du chapitre 13

On sait déjà que $p_F(\phi) = t - \frac{1}{6}$.

D'après la relation précédente (Théorème de Pythagore) :

$$\begin{aligned} d(\phi, F)^2 &= \|\phi\|^2 - \|p_F(\phi)\|^2 \\ &= \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{36}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{36 - 60 + 30 - 5}{5 \times 36} \\ &= \frac{1}{5 \times 36} \Rightarrow d(\phi, F) = \frac{1}{6\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Exercice 1 du TD 13

Ex 1 a) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(A^T B)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}^T \times B_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} \times B_{k,j}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i} \times B_{k,i}$$

b) $\varphi: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$
 $\rightarrow$ bilinéaire par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de la trace
 $\varphi(dA_1 + A_2, B) = \text{tr}((dA_1 + A_2)^T B) = \text{tr}(dA_1^T B + A_2^T B)$
 $= \text{tr}(A_1^T B) + \text{tr}(A_2^T B) = \varphi(A_1, B) + \varphi(A_2, B)$
 $\rightarrow$ symétrique car :
 $\text{tr}(B^T A) = \text{tr}(A^T B^T) = \text{tr}(A^T B)$

$\rightarrow$ positif car :
 $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \geq 0$

$\rightarrow$ défini positif car
 $\text{tr}(A^T A) = 0 \Rightarrow \forall (i, k) A_{i,k}^2 = 0$
 $\Rightarrow A = O_n$

c) On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ via un isomorphisme qui envoie la base canonique de l'un sur celle de l'autre.
On applique Cauchy-Schwarz avec $A = (a_{ij})$ et $B = I_n$

$$|\text{tr}(A^T B)| \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \times \sqrt{\text{tr}(B^T B)}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n a_{i,i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \times \sqrt{n}$$

Cas d'égalité : A et B sont colinéaires $\Leftrightarrow A$ est scalaire.

$$d) \lambda_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 = O_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 & d_2 \\ d_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

$$\Rightarrow (A_1, A_2, A_3) \text{ famille libre dans } M_2(\mathbb{R})$$

Orthogonaliser au gram-Schmidt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \|A_1\| = \sqrt{2} \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1$$

$$B_2 = A_2 - \langle A_2 | E_1 \rangle \cdot E_1$$

$$\langle A_2 | E_1 \rangle = \text{tr} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$B_2 = A_2 - \sqrt{2} \cdot E_1 = A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{1}{\|B_2\|} \cdot B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = A_3 - \langle A_3 | E_1 \rangle \cdot E_1 - \langle A_3 | E_2 \rangle \cdot E_2$$

$$\langle A_3 | E_1 \rangle = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \langle A_3 | E_2 \rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \text{tr} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$B_3 = A_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot E_1 = A_3 - \frac{1}{2} A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\|B_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot B_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

or la famille orthogonale obtenue $\text{Vect}(A_1, \dots, A_i) = \text{Vect}(E_1, \dots, E_i)$

Exercice 4 Exercice 2 du TD 13

Exercice 2 : Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$
 $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

2) Produit scalaire :

- bilinéarité : découle de la linéarité de l'intégral

$$\int_{-1}^1 (af_1 + bf_2)g = a \int_{-1}^1 f_1g + b \int_{-1}^1 f_2g$$

- Symétrie : $\int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^1 gf$

- Positivité : $\int_{-1}^1 f^2 \geq 0$ par positivité de $\int$

- défini positif : si $\int_{-1}^1 f^2 = 0 \Rightarrow f^2 = 0$ car $f^2 \geq 0$ et positif
 $\Rightarrow f = 0$

b) $e_1: t \mapsto 1 \quad e_2: t \mapsto t \quad e_3: t \mapsto t^2$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$

i.e $\forall t \in [-1, 1] \quad a + bt + ct^2 = 0$

$\Rightarrow a + bt + ct^2$ a une ∞^e de racines

$\Rightarrow a = b = c = 0$

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ lib.

$e_1: t \mapsto 1 \quad \|e_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 1 dt} = \sqrt{2} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_1$

$\langle f_1 | e_2 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$

$\langle f_1 | e_3 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$e'_2 = e_2 - \langle e_2 | f_1 \rangle \cdot f_1 = e_2$

$\|e'_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad f_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e_2$

$\langle f_2 | e_3 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$

$$e'_3 = e_3 - \langle e_3 | f_1 \rangle \cdot f_1 - \langle e_3 | f_2 \rangle \cdot f_2$$

$$= e_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_1 - 0 \cdot f_2$$

$$= e_3 - \frac{1}{3} \cdot e_1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|e'_3\| = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}) dt}$$

$$= \left(\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{9}t^3 + \frac{t}{9} \right]_0^1 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{18 - 20 + 10}{45}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \Rightarrow f_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$f_1: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f_2: t \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad f_3: t \mapsto \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$$

st une famille orthonormale et $\text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$

Exercice 5 Exercice 6 du TD 13

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin(t) - at - b)^2 dt$.

Dans $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

il s'agit du carré de la distance minimale de $\sin$ au plan $P = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$ que l'on sait être atteint en $t \mapsto a_0t + b_0$ projeté orthogonal de $\sin$ sur P , c'est à dire pour $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$t \mapsto \sin(t) - a_0t - b_0 \in P^\perp \iff \begin{cases} \langle t \mapsto \sin(t) - a_0t - b_0 | t \mapsto 1 \rangle = 0 \\ \langle t \mapsto \sin(t) - a_0t - b_0 | t \mapsto t \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \int_0^\pi \sin(t) - a_0t - b_0 dt = 0 \\ \int_0^\pi t \sin(t) - a_0t^2 - b_0t dt = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[-\cos(t) - a_0 \frac{t^2}{2} - b_0t \right]_0^\pi = 0 \\ \int_0^\pi t \sin(t) dt - \left[a_0 \frac{t^3}{3} + b_0 \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = 0 \end{cases}$$

Une IPP donne $\int_0^\pi t \sin(t) dt = [-t \cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t) dt = \pi$. Ainsi le couple (a_0, b_0) est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} \frac{\pi^2}{2}a_0 + \pi b_0 = 2 \\ \frac{\pi^3}{3}a_0 + \frac{\pi^2}{2}b_0 = \pi \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

Ainsi (par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$) :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin(t) - at - b)^2 dt &= \int_0^\pi (\sin(t) - b_0)^2 dt \\ &= \int_0^\pi \sin^2(t) + b_0^2 - 2b_0 \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} + b_0^2 - 2b_0 \sin(t) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + b_0^2 t + 2b_0 \cos(t) \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + b_0^2 \pi - 4b_0 \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}} \end{aligned}$$