

Exercice 1

On a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

a) Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit semblable à une matrice T_0 strictement triangulaire supérieure. Alors ces deux matrices ont même polynôme caractéristique :

$$\chi_M = \chi_T = \begin{vmatrix} X & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & X \end{vmatrix} = X^n$$

D'après le théorème d'Hamilton-Cayley $M^n = O_n$ et donc M est nilpotente.

Réciproquement, supposons M nilpotente, et donc soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = O_n$. Soit λ une valeur propre complexe de M vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors un argument immédiat montre que λ^p est valeur propre de $M^p = O_n$ et donc $\lambda^p = 0$ ce qui implique $\lambda = 0$. Ainsi $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ et le polynôme caractéristique de M (étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$) est $\chi_M = X^n$. Puisqu'il est aussi scindé dans $\mathbb{K}[X]$, M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice triangulaire supérieure avec ses valeurs propres sur la diagonale, c'est à dire à une matrice strictement triangulaire supérieure.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ dont le polynôme caractéristique est scindé ; alors M est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T = D + T_0$ avec D diagonale et T_0 strictement triangulaire supérieure. Ainsi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$M = P(D + T_0)P^{-1} = \underbrace{PDP^{-1}}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{PT_0P^{-1}}_{\text{nilpotente}}.$$

M est donc somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente.

Exercice 2

a) Soit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & -2 \\ 10 & \lambda - 6 & -8 \\ -3 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -8 \\ \lambda - 1 & -1 - \lambda & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda((\lambda + 2)^2 - 8(1 + \lambda)) + 2(2 + 2\lambda) + 2(\lambda + 2)(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 4) + 2(2 + 2\lambda) + 2(\lambda + 2)(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda + 2\lambda^2 + 4\lambda - 2\lambda - 4 \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \quad \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 = 1 \pm i \end{aligned}$$

$$\boxed{Sp(A) = \{0, 1 - i, 1 + i\}}$$

Il y a 3 valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (mais pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Déterminons une base de vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) &\iff \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -10x + 6y + 8z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \implies E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1-i}(A) &\iff \begin{cases} (-3 + i)x + 2y + 2z = 0 \\ -10x + (5 + i)y + 8z = 0 \\ 3x - y + (-3 + i)z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - y + (-3 + i)z = 0 \\ (5 + 3i)y + (-6 + 10i)z = 0 \\ (-3 - i)y + (2 - 6i)z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - y + (-3 + i)z = 0 \\ (5 + 3i)y + (-6 + 10i)z = 0 \\ ((5 + 3i)(2 - 6i) + (3 + i)(-6 + 10i))z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - y + (-3 + i)z = 0 \\ (5 + 3i)y + (-6 + 10i)z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x = (1 - i)z \\ y = -2iz \end{cases} \implies E_{1-i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 - i \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Enfin finalement puisque la valeur $1+i$ est conjuguée de la valeur propre $1-i$ et puisque A est à coefficients réels, on remarque facilement que les vecteurs propres associés à $1+i$ ont des coordonnées conjugués de celles des vecteurs propres associés à $1-i$; donc :

$$E_{1+i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & 2i & -2i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique dans une base de vecteurs propres de A on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} = D$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times X(t)$; ainsi :

$$X(t) = P \times U(t)$$

Enfin posons $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $U'(t) = P^{-1} \times X'(t)$; par linéarité de la dérivation :

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Les fonctions x, y, z vérifient le système différentiel linéaire ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X'(t) = A \times X(t) \iff P^{-1}X'(t) = P^{-1}AP \times P^{-1}X(t) \iff U'(t) = D \times U(t)$$

c'est à dire ssi les fonctions u, v, w sont solutions du système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = (1+i)v(t) \\ w'(t) = (1-i)w(t) \end{cases}$$

qui se résout facilement en :

$$\begin{cases} u(t) = \alpha \\ v(t) = \beta e^{(1+i)t} \\ w(t) = \gamma e^{(1-i)t} \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{(1+i)t} \\ \gamma e^{(1-i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + (1+i)\beta e^{(1+i)t} + (1-i)\gamma e^{(1-i)t} \\ -\alpha + 2i\beta e^{(1+i)t} - 2i\gamma e^{(1-i)t} \\ 2\alpha + \beta e^{(1+i)t} + \gamma e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

Puisque $x(t), y(t), z(t)$ sont réels, ils sont égaux à leur conjugués, dont on déduit :

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \gamma = \bar{\beta}$$

en posant $\beta = a + ib$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + (1+i)\beta e^{(1+i)t} + (1-i)\bar{\beta} e^{(1-i)t} \\ &= \alpha + (1+i)(a+ib)e^{(1+i)t} + (1-i)(a-ib)e^{(1-i)t} \\ &= \alpha + ((a-b) + i(a+b))e^{(1+i)t} + ((a-b) - i(a+b))e^{(1-i)t} \\ &= \alpha + e^t \times ((a-b)(e^{it} + e^{-it}) + i(a+b)(e^{it} - e^{-it})) \\ &= \alpha + e^t \times (2(a-b)\cos(t) - 2(a+b)\sin(t)) \\ &= \alpha + 2ae^t(\cos(t) - \sin(t)) - 2be^t(\cos(t) + \sin(t)) \\ y(t) &= -\alpha + 2i\beta e^{(1+i)t} - 2i\bar{\beta} e^{(1-i)t} \\ &= -\alpha + 2i(a+ib)e^{(1+i)t} - 2i(a-ib)e^{(1-i)t} \\ &= -\alpha + e^t \times (2ia(e^{it} - e^{-it}) - 2b(e^{it} + e^{-it})) \\ &= -\alpha - 4ae^t \sin(t) - 4be^t \cos(t) \\ z(t) &= 2\alpha + \beta e^{(1+i)t} + \bar{\beta} e^{(1-i)t} \\ &= 2\alpha + (a+ib)e^{(1+i)t} + (a-ib)e^{(1-i)t} \\ &= 2\alpha + e^t \times (a(e^{it} + e^{-it}) + ib(e^{it} - e^{-it})) \\ &= 2\alpha + 2ae^t \cos(t) - 2be^t \sin(t) \end{aligned}$$

Finalement, en notant $\lambda = \alpha$, $\mu = 2a$ et $\eta = -2b$, $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont solutions du système différentiel si et seulement si :

$$\exists (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x(t) = \lambda + \mu.e^t(\cos(t) - \sin(t)) + \eta.e^t(\cos(t) + \sin(t)) \\ y(t) = -\lambda - 2\mu.e^t \sin(t) + 2\eta.e^t \cos(t) \\ z(t) = 2\lambda + \mu.e^t \cos(t) + \eta.e^t \sin(t) \end{cases}$$