

DM de Mathématiques n° 4

Pour le Lundi 6 janvier

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* si il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = O_n$.

- (a) Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est à dire à $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \geq j \implies t_{i,j} = 0$).
- (b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé est somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente.

Exercice 2

- (a) Soit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- (b) Déterminer toutes les fonctions $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel linéaire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -10x(t) + 6y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

On veillera bien à donner des expressions réelles pour $x(t), y(t), z(t)$ fonctions de t .