

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n}$.

1) $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est-elle absolument convergente ?

Non bien sûr, puisque $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série divergente (série harmonique).

2) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$$

Utilisons la formule très utilisée pour les séries

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{e^{in\theta}}{n} &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 e^{in\theta} t^{n-1} dt = \sum_{k=1}^n e^{i\theta} \int_0^1 (e^{i\theta}t)^{n-1} dt \\ &= e^{i\theta} \int_0^1 \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt - e^{i\theta} \int_0^1 \frac{(e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt \end{aligned}$$

(on a bien $\forall t \in [0, 1], e^{i\theta}t \neq 1$).

En remarquant que $\begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \longmapsto |1 - e^{i\theta}t| \end{cases}$ est continue sur un segment et donc atteint ses bornes, en particulier il existe un $a = \min_{t \in [0, 1]} |1 - e^{i\theta}t| > 0$

$$\forall t \in [0, 1] \quad |1 - e^{i\theta}t| \geq a$$

On en déduit alors aisément :

$$\left| e^{i\theta} \int_0^1 \frac{(e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{a} dt \leq \frac{1}{a(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En conclusion : $\sum_{k=1}^n \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + i \frac{\pi - \theta}{2}$.

C'est l'occasion de réviser le calcul intégral... sur des fractions rationnelles... complexes. On commence par rendre le dénominateur réel (en utilisant le conjugué) :

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} &= \frac{e^{i\theta} (1 - e^{-i\theta}t)}{|1 - e^{i\theta}t|^2} \\ &= \frac{-t + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} \end{aligned}$$

Commençons par la partie réelle :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{-t + \cos \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t - 2 \cos \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(1 - 2t \cos \theta + t^2)]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \ln[2(1 - \cos \theta)] = -\frac{1}{2} \ln \left[4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(car $\theta \in]0, \pi[\implies \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) > 0$)

Pour la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt &= \sin \theta \int_0^1 \frac{1}{(t - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} dt \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + 1} dt \end{aligned}$$

(on a utilisé $\sin \theta > 0$)

par le changement de variable $u = \frac{t - \cos \theta}{\sin \theta}$, $du = \frac{1}{\sin \theta} dt$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt &= \frac{1}{\sin \theta} \times \sin \theta \int_{-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}^{\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \text{Arctan} \left[\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right] - \text{Arctan} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}$

Finalement

$$\int_0^1 \frac{\sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt = \operatorname{Arctan} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{Arctan} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Explications - $\theta \in]0, \pi[$ [donc $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où $\operatorname{Arctan} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\theta}{2}$

- si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} > 0$ donc

$$\operatorname{Arctan} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}[\tan \theta] = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\operatorname{Arctan} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right] = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}[\tan(\theta - \pi)]$$

$$= -\frac{\pi}{2} - (\theta - \pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $\operatorname{Arctan} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] = 0 (= \frac{\pi}{2} - \theta)$

(solution n°2 : on remarque que $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et comme $\frac{\pi}{2} - \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est plus rapide)

$$\text{CONCLUSION } \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + i \frac{\pi - \theta}{2}$$

4) Que peut-on en déduire concernant $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n}$?

Il s'agit des parties réelles et imaginaires de notre série de départ, elles sont donc aussi convergentes et valent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{|\sin n\theta|}{n}$.

a) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |\sin(x + \theta)| + |\sin x|. \end{cases}$

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) \geq A$.

f est π -périodique et continue donc $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ existe et vaut un certain $f(\alpha) = A$, $\alpha \in [0, \pi]$

Si $f(\alpha) = 0$ alors $\sin \alpha = 0$ et $\sin(\alpha + \theta) = 0$

donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, mais ceci implique que $\sin \theta = 0$ contredisant $\theta \in]0, \pi[$.

CONCLUSION $A > 0$.

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$v_{2p-1} + v_{2p} \geq \frac{A}{2p}.$$

Ecrivons pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$v_{2p-1} + v_{2p} = \frac{|\sin(2p-1)\theta|}{2p-1} + \frac{|\sin 2p\theta|}{2p}$$

$$\geq \frac{1}{2p} (|\sin(2p-1)\theta| + |\sin 2p\theta|)$$

$$\geq \frac{f((2p-1)\theta)}{2p} \geq \frac{A}{2p}$$

c) En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$.

La série (à termes positifs) $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p}$ étant divergente, on en déduit la divergence de la série à termes positifs $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} (v_{2p-1} + v_{2p})$

Écrivons $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$. Nous avons (S_n) croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = +\infty$ donc (S_n) diverge

CONCLUSION La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est divergente

(ainsi les séries précédentes sont semi-convergentes (sin ou cos peu importe))