

DM de Mathématiques n° 3

Pour le Mercredi 6 novembre

Étude d'une série

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n}$

1) $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est-elle absolument convergente ?

2) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta t}}{1 - e^{i\theta t}} dt$$

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{i\theta t}}{1 - e^{i\theta t}} dt = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + i \cdot \frac{\pi - \theta}{2}$.

4) Que peut-on en déduire concernant $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n}$?

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{|\sin n\theta|}{n}$.

a) Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |\sin(x + \theta)| + |\sin(x)| \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) \geq A$.

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$v_{2p-1} + v_{2p} \geq \frac{A}{2p}.$$

c) En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$.