

Calcul approché de la constante de Prouhet-Thue-Morse.

La suite de Prouhet-Thue-Morse est une suite infinie $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 et de 1 construite de la façon suivante : on part du mot : 0 et on applique indéfiniment sur chaque caractère du mot les transformations :

$$0 \rightarrow 01 \quad 1 \rightarrow 10$$

Les premières itérations donnent :

0

01

0110

01101001

0110100110010110

Comme on le voit, un mot obtenu après itération est un préfixe de celui obtenu à l'itération suivante. Cela permet de définir le mot infini obtenu ; c'est la suite $(t_n)_n$ de Prouhet-Thue-Morse. Vu comme l'écriture binaire après la virgule d'un nombre dans $[0, 1[$, c'est-à-dire comme le nombre :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{2^{n+1}} \approx 0,412\,454\dots$$

c'est un nombre transcendant (ce n'est la racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels, comme e et π). On l'appelle la constante de Prouhet-Thue-Morse.

Écrire une fonction prenant en paramètre un entier n et qui renvoie une valeur approchée à 2^{-n} près par défaut de la constante de Prouhet-Thue-Morse.