

1. (a) Soit f affine, $f : x \mapsto \alpha x + \beta$, et donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^b \alpha t + \beta dt = \left[\alpha \frac{t^2}{2} + \beta t \right]_a^b = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) + \beta(b - a) \\ &= (b - a) \times \frac{\alpha b + \alpha a + 2\beta}{2} = \boxed{(b - a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}} \end{aligned}$$

(b) En particulier $\int_{n-1}^n h(t)dt = \frac{\ln(n) + \ln(n-1)}{2}$; ainsi par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n-1}^n \ln(t)dt - \int_{n-1}^n h(t)dt = [t \ln(t) - t]_{n-1}^n - \frac{\ln(n) + \ln(n-1)}{2} \\ &= -1 + \frac{2n-1}{2} \times (\ln(n) - \ln(n-1)) \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\ln(n) - \ln(n-1) = \ln(n) - \ln(n) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+}{\approx} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \implies u_n &\underset{+}{\approx} -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{+}{\approx} -1 + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + \left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{+}{\approx} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(d) Par comparaison avec une série de Riemann, $\sum \frac{1}{12n^2}$ est convergente et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente et donc convergente. Ainsi, comme somme de séries convergentes, $\sum u_n$ converge.

(e) On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n u_n = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t)dt - \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k) + \ln(k-1)}{2} \\ &= \int_1^n \ln(t)dt - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \ln(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \\ &= \int_1^n \ln(t)dt - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \int_1^n \ln(t)dt - \sum_{k=2}^n \ln(k) + \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= n \ln(n) - n + 1 - \ln(n!) + \frac{1}{2} \ln(n) = \boxed{\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 - \ln(n!)} \end{aligned}$$

(f) D'après (e) :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 - S_n \\ \implies n! &= n^n \sqrt{n} \times e^{-n} \times e^{1-S_n} \\ \implies n! \times \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} &= e^{1-S_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1-S} = C > 0 \\ \implies n! &\underset{+}{\approx} C \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \end{aligned}$$

avec $C = e^{1-S}$.

2. (a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, et donc $\sin^{n+2}(t) \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Ainsi par croissance de l'intégrale : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue, par composition de fonctions continues, positive, et non nulle, donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt > 0$. Ainsi :

$$\boxed{0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n}$$

(b)

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) - \sin^n(t)dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t)dt$$

On procède à l'intégration par partie avec $(u, v$ de classe $\mathcal{C}^1)$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u' = \sin^n(t) \cos(t) & u = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}(t) \\ v' = -\sin(t) & v = \cos(t) \end{cases} \\ I_{n+2} - I_n &= - \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} \sin^{n+1}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt \\ &= \boxed{-\frac{1}{n+1} I_{n+2}} \\ \implies \frac{n+2}{n+1} \times I_{n+2} &= I_n \\ \implies \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n} \end{aligned}$$

(c) Par récurrence sur p :

(I) Pour $p = 0$:

$$I_{2p} = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = \left[-\cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Ainsi l'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $p \geq 0$.

$$\begin{cases} I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} \times I_{2p} \stackrel{HR}{=} \frac{(2p+1)(2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{(2p+2)2p(2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} \times I_{2p+1} \stackrel{HR}{=} \frac{(2p+2)2p(2p-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2p+3)(2p+1)(2p-1) \cdots 3 \cdot 1} \end{cases}$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $p+1$. On conclut avec le principe de récurrence.

En remarquant que :

$$\underbrace{2p(2p-2) \cdots 4 \cdot 2}_{p \text{ termes}} = 2^p \cdot p! \quad \text{et} \quad (2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1 \times 2^p \cdot p! = (2p)!$$

on en déduit que :

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{2p(2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \times \frac{2^p \cdot p!}{2^p \cdot p!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2p+1)(2p-1) \cdots 3 \cdot 1} \times \frac{2^p \cdot p!}{2^p \cdot p!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

Ainsi :

$$I_{2p} \times I_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \boxed{\frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}}$$

(d) D'après (b), $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Or d'après (a) :

$$0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \implies 0 < \underbrace{\frac{I_{n+2}}{I_n}}_{\rightarrow 1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

ainsi d'après le théorème des gendarmes, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

En particulier :

$$I_{2p} \times I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2} \implies (I_{2p})^2 \sim \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2} \implies I_{2p} \sim \sqrt{\frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

par produit et puissance d'équivalents.

(e) On a d'une part :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \times I_{2n} \quad (2)$$

D'autre part : d'après (d)

$$I_{2p} \sim \sqrt{\frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

D'après (1) et (2) :

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n+1}}{\pi} \times \sqrt{\frac{1}{2n+1} \times \frac{\pi}{2}} \sim \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\frac{1}{4n}} \sim \boxed{\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}}$$

3. En injectant l'équivalent de $n!$ obtenu en 1) dans celui de $\binom{2n}{n}$ obtenu en 2) :

$$\left. \begin{aligned} \binom{2n}{n} &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \\ \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} \sim \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \implies C = \sqrt{2\pi}$$

On obtient finalement :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$