

DM de Mathématiques n° 2

Pour le Lundi 4 Novembre

Le but du DM est de démontrer la formule de Stirling qui donne équivalent de $n!$:**Formule de Stirling.**

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:– soit h_n la fonction affine sur $[n-1, n]$ qui coïncide avec \ln en $n-1$ et en n ,– soit $u_n = \int_{n-1}^n (\ln - h_n)$.(a) Montrer que si f est une fonction affine, $\int_a^b f(t)dt = (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2}$.(b) Calculer u_n .(c) Obtenir un développement asymptotique à l'ordre 2 pour u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.(d) En déduire que $\sum u_n$ converge. Notons S sa somme. On ne demande pas pour l'instant la valeur de S .(e) Soit $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ la somme partielle de la série ; calculer S_n pour l'exprimer en fonction de n , $\ln(n)$ et $\ln(n!)$.(f) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $n! \sim C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$. On ne demande pas le calcul de C , qui sera effectué dans la prochaine partie.2. Obtention d'un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ à l'aide des intégrales de Wallis.On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.(b) Simplifier à l'aide d'une intégration par partie $I_{n+2} - I_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n$.(c) Établir pour tout $p \in \mathbb{N}$ que :

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1}{2p(2p-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3 \cdot 1} \end{cases} \quad \text{puis que} \quad \begin{cases} I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

En déduire que $I_{2p} \times I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$.(d) Montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En déduire un équivalent simple de I_{2p} .(e) En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

3. Obtenir la formule de Stirling.