Exercice 1

a)

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$
$$= \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} \longrightarrow 1$$

b)

$$v_n = \frac{4(n+1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2n^2 + 3}{n\left((-1)^n + e^{\frac{1}{n}}\right)}$$
$$v_{2n} = \frac{(8n+4)n - 8n^2 + 3}{2n\left(1+e^{\frac{1}{2n}}\right)} = \frac{4n+3}{2n\left(1+e^{\frac{1}{2n}}\right)} \longrightarrow 1$$
$$v_{2n+1} = \frac{(8n+8)n - 8n^2 - 8n + 1}{(2n+1)(-1+e^{\frac{1}{2n+1}})} \sim 1 \longrightarrow 1$$

donc $\lim u_n = 1$.

c)

$$w_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$
$$w_{2n} = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\implies w_{2\times 2n} = w_{4n} = \sin(n\pi) = 0$$
$$\text{et } w_{2\times(2n+1)} = w_{4n+2} = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Problème 2

Partie I.

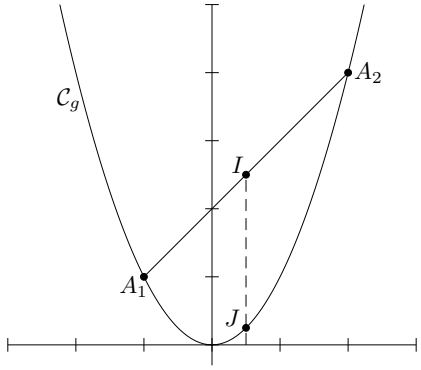
1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; alors :

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{g(x)+g(y)}{2} \iff \frac{(x+y)^2}{4} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$
$$\iff x^2+y^2+2xy \leqslant 2x^2+2y^2 \iff 0 \leqslant x^2+y^2-2xy$$
$$\iff 0 \leqslant (x-y)^2 \quad \text{vrai puisqu'un carré de réels est toujours positif}$$

Ainsi g vérifie $(*)$.

2. Voir le graphique ci-dessous.

3. L'interprétation géométrique de $(*)$ est : une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie $(*)$ si et seulement si pour tout couple de points $A_1(x_1, h(x_1))$ et $A_2(x_2, h(x_2))$ situés sur la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de h, le point de $\mathcal{C}_h$ d'abcisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est situé au dessous du milieu du segment $[A_1, A_2]$.



4. Toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ satisfait $(*)$. En effet pour une fonction convexe sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1], f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

c'est à dire $(*)$.

La fonction exp étant croissante et convexe sur $\mathbb{R}$, c'est un tel exemple.

Remarque. Il s'avère que la relation $(*)$ équivaut à f convexe sur $\mathbb{R}$. Bref notre preuve établit le résultat connu, qu'une fonction convexe est nécessairement continue, mais dans le cas particulier où la fonction est croissante.

Partie II.

1. Puisque f est une fonction croissante, d'après le corollaire du théorème de la limite monotone, elle admet en tout point de $\mathbb{R}$ une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche finies ; de plus $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On applique la propriété $(*)$ avec $x = a$ et $y = a + u_n$; on obtient $f\left(a + \frac{u_n}{2}\right) = f\left(\frac{a + a + u_n}{2}\right) \leqslant \frac{f(a) + f(a + u_n)}{2}$ qui donne l'inégalité recherchée.

   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a + \frac{u_n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(a + u_n) = a^+$. Puisque f a une limite à droite en a, d'après le théorème de composition des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(a + \frac{u_n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a + u_n) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité établie dans la question précédente pour obtenir l'inégalité :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant \frac{f(a) + \lim\limits_{x\to a^+} f(x)}{2}$$

   dont on déduit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \leqslant f(a)$. Puisque par ailleurs $f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (d'après 1)) on a ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$.

   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On applique ici encore $(*)$ avec $x = a - u_n$ et $y = a + u_n$, on obtient : $f(a) = f\left(\frac{a - u_n + a + u_n}{2}\right) \leqslant \frac{f(a - u_n) + f(a + u_n)}{2}$ qui donne l'inégalité recherchée.

   (d) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(a - u_n) = a^-$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a + u_n) = a^+$. Par ailleurs f admet une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche en a, donc d'après le théorème de composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a - u_n) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a + u_n) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente on obtient l'inégalité :

$$f(a) \leqslant \frac{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) + \lim\limits_{x\to a^+} f(x)}{2}$$

   puisque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (d'après 2.b)), on en déduit $\boxed{f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^-} f(x)}$.

   Avec 1) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a)$, et on en déduit donc $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)}$.

   (e) Avec 2.b) et 2.d) :

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$$

   Donc f a une limite en a égale à $f(a)$. Cela est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc f est continue.

Partie III.

1. On suppose f majorée.

   (a) D'après le Théorème de la limite monotone, puisque f est croissante, elle admet une limite en $+\infty$, et puisque f est majorée cette limite est finie égale à $L = \text{Sup } f = \sup\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

   (b) On particularise $(*)$ avec $y = 0$, pour obtenir :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x + 0}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(0)}{2}$$

   (c) Puisque f a pour limite L en $+\infty$, en faisant tendre dans cette inégalité x vers $+\infty$ on obtient : $L \leqslant \frac{L + f(0)}{2}$ dont on déduit $\boxed{L \leqslant f(0)}$.
   Mais d'après 1.a) L est un majorant de $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$, en particulier $f(0) \leqslant L$. On obtient donc $L = f(0)$.

   (d) On traite successivement les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
   – Si $x \geqslant 0$ alors puisque f est croissante $f(x) \geqslant f(0)$. Par ailleurs puisque L est un majorant de $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$, on a :

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant L = f(0)$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = f(0)$.
   –Si $x < 0$ montrons par l'absurde que $f(x) = f(0)$. Supposons donc que $f(x) \neq 0$. Puisque f est croissante, $f(x) < f(0)$. Appliquons $(*)$ à x et $y = -x > 0$. On a donc :

$$f(0) = f\left(\frac{x + (-x)}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

   Mais d'une part on a supposé que $f(x) < f(0)$ et d'autre part puisque $-x > 0$ d'après le cas précédent $f(-x) = f(0)$. Donc on obtient :

$$f(0) \leqslant \frac{f(x) + f(-x)}{2} < \frac{f(0) + f(0)}{2} = f(0)$$

   ce qui est contradictoire. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$: f est constante.

2. Si f n'est pas constante, d'après 1.d) f n'est pas majorée. D'après le Théorème de la limite monotone, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.