Devoir à la maison de Mathématiques n° 1

A rendre pour le Lundi 30 septembre

Exercice 1

Étudier la nature et donner la limite éventuelle des suites :

a) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ b) $v_n = \dfrac{4(n+1)\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 2n^2 + 3}{n\left((-1)^n + e^{\frac{1}{n}}\right)}$ c) $w_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$

Problème 2

Les 3 parties sont indépendantes.

On considère une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>croissante</u> et vérifiant :

$$\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (*)$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'une telle application est nécessairement continue, et de déterminer ses limites aux bornes.

Partie I. *Exemple et interprétation géométrique*

Soit l'application $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que g vérifie $(*)$ (sans être cependant croissante).
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, représenter la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g, et pour $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$:
   – le segment $[A_1, A_2]$ reliant les deux points $A_1(x_1, g(x_1))$ et $A_2(x_2, g(x_2))$ de $\mathcal{C}_g$,
   – les deux points $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\right)$ et $J\left(\frac{x_1+x_2}{2}, g(\frac{x_1+x_2}{2})\right)$.
3. Donner une interprétation géométrique de la propriété $(*)$.
4. Quelles autres fonctions vérifient $(*)$? Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>croissante</u> satisfaisant $(*)$.

Partie II. *Continuité de f*

1. Justifier que f admet en tout point une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche, finies et que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
2. Dans cette question (u_n) désigne une suite à termes positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f\left(a + \dfrac{u_n}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(a+u_n)}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

(c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f(a) \leqslant \dfrac{f(a-u_n)+f(a+u_n)}{2}$.

(d) En déduire que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

(e) Conclure.

Partie III. *Limite de f en $+\infty$.*

1. On suppose dans cette question que f est majorée.
   (a) Justifier que f a une limite finie en $+\infty$ que l'on notera L et on en donnera une caractérisation.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(0)}{2}$.
   (c) Montrer que $L \leqslant f(0)$.
   (d) En déduire que f est constante.
2. On suppose dans cette question que f n'est pas constante ; justifier que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.