Fiche n° 11 : Espaces euclidiens

Ex 1

a) $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(A^TB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A^T_{ik} \times B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \times B_{kj}$$

$$\Rightarrow tr(A^TB) = \sum_{i=1}^{n} (A^TB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki} \times B_{ki}$$

b) $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A, B) \longmapsto tr(A^TB)$$

→ bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace

$$\varphi(\lambda A_1 + A_2, B) = tr\left((\lambda A_1 + A_2)^T B\right) = tr\left((\lambda A_1)^T B + A_2^T B\right)$$
$$= \lambda tr(A_1^T B) + tr(A_2^T B) = \lambda\varphi(A_1, B) + \varphi(A_2, B)$$

→ symétrique car :

$$tr(B^TA) = tr\left((A^TB)^T\right) = tr(A^TB)$$

→ positive car :

$$tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \geqslant 0$$

→ définie positive car

$$Tr(A^TA) = 0 \Rightarrow \forall (i,k)\ A_{ik}^2 = 0$$
$$\Rightarrow A = 0_n$$

c) On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ via un isomorphisme qui envoie la base canonique de l'un sur celle de l'autre.
On applique Cauchy-Schwarz avec $A=(a_{ij})$ et $B=I_n$

$$|tr(A^TB)| \leqslant \sqrt{tr\,A^TA} \times \sqrt{tr\,B^TB}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \times \sqrt{n}$$

Cas d'égalité : A et B sont colinéaires $\Leftrightarrow$ A est scalaire.
$\Leftrightarrow$

d) $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0_2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow (A_1, A_2, A_3)$ famille libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Orthonormalisé de gram-Schmidt.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \|A_1\| = \sqrt{2} \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1$

$B_2 = A_2 - \langle A_2 | E_1 \rangle \cdot E_1$

$\langle A_2 | E_1 \rangle = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$B_2 = A_2 - \sqrt{2} \cdot E_1 = A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_2 = \frac{1}{\|B_2\|} \times B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_3 = A_3 - \langle A_3 | E_1 \rangle \cdot E_1 - \langle A_3 | E_2 \rangle \cdot E_2$

$\langle A_3 | E_1 \rangle = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle A_3 | E_2 \rangle = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$

$= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$B_3 = A_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot E_1 = A_3 - \frac{1}{2} A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\|B_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot B_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et la famille orthonormée obtenue $\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_i) = \mathrm{Vect}(E_1, \dots, E_i)$ //

Exercice 2 Dans $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$

$(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

2) Produit scalaire :

- bilinéarité : découle de la linéarité de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (\lambda f_1 + f_2)g = \lambda \int_{-1}^{1} f_1 g + \int_{-1}^{1} f_2 g$$

- Symétrie : $\int_{-1}^{1} fg = \int_{-1}^{1} gf$

- Positivité : $\int_{-1}^{1} f^2 \geq 0$ par positivité de $\int$

- définie positive si $\int_{-1}^{1} f^2 = 0 \Rightarrow f^2 = 0$ car $f^2 \in \mathcal{C}^0$ et positive

$\Rightarrow f = 0$

b) $e_1 : t \mapsto 1 \quad e_2 : t \mapsto t \quad e_3 \mapsto t^2$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$

i.e $\forall t \in [-1,1] \quad a + bt + ct^2 = 0$

$\Rightarrow a + bX + cX^2$ a une $\infty^{\text{té}}$ de racines

$\Rightarrow a = b = c = 0$

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ libre.

$e_1 : t \longrightarrow 1 \quad \|e_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dt} = \sqrt{2} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_1$

$\langle f_1 | e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$

$\langle f_1 | e_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} t^2\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$e_2' = e_2 - \langle e_2 \cdot f_1 \rangle \cdot f_1 = e_2$

$\|e_2'\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad f_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e_2$

$\langle f_2 | e_3 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$

$$e_3' = e_3 - \langle e_3 | f_1 \rangle \cdot f_1 - \langle e_3 | f_2 \rangle \cdot f_2$$

$$= e_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_1 - 0 \cdot f_2$$

$$= e_3 - \frac{1}{3} \cdot e_1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|e_3'\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt}$$

$$= \left(\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{9}t^3 + \frac{t}{9} \right]_{-1}^{1} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{18 - 4 + 2}{45}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} \Rightarrow f_3 = \frac{3\sqrt{5}}{4} \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$f_1 : t \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad f_2 : t \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} t$ $\quad f_3 : t \mapsto \frac{3\sqrt{5}}{4}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$

Si une famille orthonormée et $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$

Exercice 3

$E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi], \mathbb{R})$ $\quad (f,g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$

$F = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$ $\quad x : t \mapsto t$

On cherche $p(x)$ tq $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$

$f'' + f = 0$ (EC) $r^2 + 1 = 0$ $\quad r = \pm i$

$\Rightarrow f \in F \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad f = a\cos(t) + b\sin(t)$

$F = \text{Vect}(\cos, \sin)$

$\Rightarrow$ On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $t - a\cos(t) - b\sin(t) \perp \cos$ et $\perp \sin$

$$\int_0^\pi t\cos(t)\,dt = [t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)\,dt = [+\cos t]_0^\pi = -2$$

$$\int_0^\pi \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^\pi = 0$$

$$\int_0^\pi t\sin(t)\,dt = [-t\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\,dt = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} -2 - a\frac{\pi}{2} = 0 \\ \pi - b\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{4}{\pi} \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) : t \mapsto -\frac{4}{\pi}\cos(t) + 2\sin(t)}$$

Exercice 4

$\mathbb{R}^n$ muni du P.S usuel $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad y = (1, \dots, 1)$

Cauchy Schwarz :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

$$\Rightarrow \langle x | y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum x_k\right)^2 \leq \sum x_k^2 \times n$$

Exercice 5 $\mathbb{R}^3$ muni du P.S. canonique.
matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $P = (x+y+z=0)$

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ on cherche a et b tq $p(u) = a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

i.e $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in P^\perp$

$$p(u) = \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z+a+b\end{pmatrix} \in P^\perp \quad \text{si et seulement si}$$

$$\begin{cases} x-a-z-a-b=0 \\ y-b-z-a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} +2a+b = -x+z \\ a+2b = -y+z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3b = -x+2y-z \\ -3a = 2x-y-z \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3}(-2x+y+z) \\ b = \frac{1}{3}(x-2y+z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$p\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$p\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}}$$

Remarque : On a identifié $\mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour plus de lisibilité (via l'isomorphisme canonique)

Exercice 6 Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin(t) - at - b)^2 dt$

⇒ Dans $E = \mathcal{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$(f,g) \longmapsto \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$
le carré de

→ C'est la distance de sin au plan $P = \text{Vect}(t\mapsto 1 ; t\mapsto t)$
On sait que cette distance est atteinte au projeté orthogonal de sin sur P.

→ On détermine une base orthonormale de P à l'aide de Gram-Schmidt.

$u_1 = t \longmapsto 1$ $\quad \|u_1\| = \left(\int_0^\pi dt\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot u_1 : t \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\langle u_2 | e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi t\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi$

$u_2 = t \longmapsto t$ $\quad v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle \cdot e_1$

$= u_2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\pi e_1 = t \mapsto t - \frac{\pi}{2}$

$= t \longmapsto t - \frac{\pi}{2}$

$$\|v_2\| = \left(\int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right]_0^\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

$\langle \sin | e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$\langle \sin | e_2 \rangle = \frac{1}{\|v_2\|} \times \int_0^\pi \sin t \left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt$

$= \frac{1}{\|v_2\|} \times \int_0^\pi t \cdot \sin(t)\,dt - \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\|v_2\|} \int_0^\pi \sin(t)\,dt$

$\int_0^\pi t \sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,dt = \pi$

$\Rightarrow \langle \sin | e_2 \rangle = \frac{1}{\|e_2\|} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-\cos t]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$a = \langle \sin | e_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \qquad b = \langle \sin | e_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow \inf_{(a,b)} \int_0^{\pi} (\sin(t) - at - b)^2 dt = \int_0^{\pi} (\sin(t) - \frac{2}{\pi} t)^2 dt = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}}$

Exercice 7 E pré-hilbertien réel F, G sev

a) ? $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$?

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow \forall y \in F, \forall z \in G \quad x \perp y \quad x \perp z$

$\Rightarrow \langle x | y+z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x \in (F+G)^\perp$

b) ? $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$?

Soit $x \in G^\perp$: $\forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall y \in F, \langle x | y \rangle = 0$

$\Rightarrow x \in F^\perp$.

$\Rightarrow F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

c) ? $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$

Soit $x \in (F+G)^\perp \qquad y \in F \quad y = y + 0_G \in F+G$

$\Rightarrow \langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow x \in F^\perp$

de même $x \in G^\perp \Rightarrow x \in F^\perp \cap G^\perp$

et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$

Exercice 8 $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longmapsto 4xx' + yy' - 2x'y - 2xy'$

est bilinéaire et symétrique (facile)

b) • positive : $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 4x^2 + y^2 - 4xy$
$= (2x - y)^2 \geq 0$

• définie positive :
non : $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ et $\varphi(v,v) = 0$

Exercice 9 E espace préhilbertien.
$e_1, \dots, e_n$ vecteurs de E unitaires.
$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2$

? $(e_1, \dots, e_n)$ BON ?

$\forall i \quad \|e_i\|^2 = 1 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i | e_j \rangle^2 \qquad \langle e_i | e_i \rangle = 1$
$\Rightarrow \forall j \neq i \quad \langle e_i | e_j \rangle = 0.$

$\Rightarrow$ famille orthonormale $\Rightarrow$ famille libre.

Soit $v \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$
alors $\|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0_E$

Si $u \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ par Gram-Schmidt,
il existe $v \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$ tq $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n, u)$
$= \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_n, v)$ i.e $u \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n, v)$
$v = 0_E \Rightarrow u \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots, e_n)$
$\Rightarrow$ contradiction
$\Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ génératrice de $E \Rightarrow$ base de E

Exercice 6 E préhilbertien. $f : E \to E$

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.
Montrer que f est linéaire.

$$\langle f(x+y) | f(z) \rangle = \langle x+y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$$
$$= \langle f(x) | f(z) \rangle + \langle f(y) | f(z) \rangle$$
$$= \langle f(x) + f(y) | f(z) \rangle$$
$$\langle f(\lambda x) | f(y) \rangle = \lambda \langle x | y \rangle = \langle \lambda f(x) | f(y) \rangle$$

il suffit de montrer que f est surjective :
car alors $\langle f(x+y) - f(x) - f(y) | f(z) \rangle = 0$
$\Rightarrow f(x+y) - f(x) - f(y) \in E^\perp = \{0_E\}$
$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$
et $\langle f(\lambda x) - \lambda f(x) | f(y) \rangle = 0$
$\Rightarrow f(\lambda x) - \lambda f(x) \in E^\perp = \{0_E\}$
$\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

? f est surjective ?
$\ker f = \{0_E\}$ car $\langle f(x) | f(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle x | x \rangle = 0$
$\Rightarrow x = 0_E$.

$\Rightarrow f$ injective

Exercice 11 $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in A_n(\mathbb{R})} \Rightarrow S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M^T = M = -M \Rightarrow 2M = 0_n$
$\Rightarrow M = 0_n$

$\Rightarrow S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$.
$\Rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ supplémentaires

On suppose : $M \in S_n(\mathbb{R})$ $M^T = M$
$N \in A_n(\mathbb{R})$ $N^T = -N$

$\langle M | N \rangle = \mathrm{tr}(M^T N) = \mathrm{tr}(MN)$
$= \mathrm{Tr}((M^T N)^T) = \mathrm{Tr}(N^T M) = \mathrm{Tr}(-NM)$
$= -\mathrm{Tr}(NM)$
$= -\mathrm{Tr}(MN)$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(MN) = -\mathrm{tr}(MN) \Rightarrow \mathrm{tr}(MN) = 0$.
$\Rightarrow \langle M | N \rangle = 0$

(rappel : traité dans le cours :)

Exercice 16 $E=\mathbb{R}[X]$ $\langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$

a) bilinéaire, symétrique, positif, défini positif (intégrale d'une fonction) $\Rightarrow$ produit scalaire.

b) $\langle X^p | X^q\rangle = \int_0^{+\infty} X^{p+q} e^{-t}\,dt = (p+q)!$

$(p+q)$ IPP : $\int_0^{+\infty} X^{p+q}e^{-t} = \left[-X^{p+q}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (p+q)\int_0^{+\infty} X^{p+q+1}e^{-t}\,dt$

$= (p+q)\int_0^{+\infty} X^{p+q+1}e^{-t}\,dt$

par récurrence immédiate $(p+q)!$

$(p+q)!\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}$

$\langle X^p | X^q\rangle = (p+q)!\ \forall p,q\in\mathbb{N}$ $= (p+q)!\times 1$

c) $u_1 = 1$ $\|u_1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt} = 1$

$\langle u_1 | X\rangle = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$

$\langle u_1 | X^2\rangle = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = 2$ (2 IPP)

$u_2 = X - \langle u_1|X\rangle . u_1$

$= X - u_1 = X - 1$

$\|u_2\|^2 = \int_0^{+\infty} (t-1)^2 e^{-t}\,dt =$

$= \int_0^{+\infty} (t^2 - 2t + 1)e^{-t}\,dt$

$= 2 - 2 + 1 = 1$

$u_3 = X^2 - \langle u_1 | X^2\rangle u_1 - \langle u_2 | X^2\rangle . u_2$

$= X^2 - u_1 - 2u_2 = X^2 - 1 - 2X + 2$

$= X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

$\|u_3\|^2 = \int_0^{+\infty} (t-1)^4 e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} (t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1)e^{-t}\,dt$

$= 4 - 12 + 12 - 4 + 1 = 1$

BON : 1 ; $X-1$; $(X-1)^2$.

Exercice 17 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible $\not\Rightarrow AA^T = A^TA$

$\Omega = (A^{-1})^T A$ orthogonale.

$$(A^{-1})^T A \times (A^{-1})^T A = (A^T A^{-1}) \times (A^{-1})^T A$$
$$= A^T \times A^{-1} \times A^{-1T} \times A$$
$$= A^T \times (A^{-1})^T \times A^{-1} \times A$$
$$= A^T \times (A^T)^{-1} \times A^{-1} \times A$$
$$= I_n \times I_n = I_n$$

($AA^T = A^TA \Rightarrow (AA^T)^{-1} = (A^TA)^{-1} \Rightarrow (A^T)^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1}$)

//

Exercice 18 $A = (a_{ij}) \in O(n)$

2) $A^TA = I_n$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $(I_n)_{jj} = 1 = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{jk} \times (A)_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A_{kj})^2$$

$\Rightarrow \forall (k,j)\ (A_{kj})^2 \leq 1 \Rightarrow |A_{kj}| \leq 1.$

b) $tr({}^tAA) = \sum_i \sum_j (a_{ij})^2 = n = tr(I_n)$

$\langle A, I_n \rangle = tr({}^tA \times I_n) = \sum_i a_{ii}$

rappel :

$$tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \times B_{ij}$$

On prend $B_{ij} = \pm 1$ de même signe que A_{ij}

$$\Rightarrow tr({}^tAB) = \sum_i \sum_i |a_{ij}|$$

C.S $\Rightarrow \sum_i \sum_j |a_{ij}| \leq \|A\| \times \|B\|$

$\|A\| = \sqrt{tr(A^TA)} = \sqrt{n}$ $\quad \|B\| = \sqrt{tr(B^TB)} = n.$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}.$$

//

Exercice 19 $M, N \in GL_n \mathbb{R}$

? $M^T M = N^T N \iff \exists U \in O(n)$ tq $M = UN$?

($\Leftarrow$) $M^T M = (UN)^T (UN) = N^T U^T U N$
$= N^T N$

($\Rightarrow$) $M^T M = N^T N \Rightarrow (N^T)^{-1} M^T = N M^{-1}$
$\Rightarrow (M N^{-1})^T \times M N^{-1} = I_n$
$\Rightarrow M N^{-1} \in O(n)$
Posons $U = M N^{-1}$ $UN = M$.

Exercice 20 E euclidien. $f \in O(E)$

36

a) ? $\ker(f - id_E) = \mathrm{Im}(f - id_E)^\perp$?

$\dim (\mathrm{Im} f - id_E)^\perp = \dim E - \dim (\mathrm{Im} f - id_E)$
$= \dim E - (E - \dim \ker f - id_E)$
$= \dim \ker f - id_E$.

$\rightarrow$ il suffit de montrer une inclusion.

Soit $u \in \ker(f - id_E)$ i.e $f(u) = u$.
Soit $v \in \mathrm{Im}(f - id_E)$ i.e $v = f(v_0) - v_0$.

$\langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v_0) - v_0 \rangle$
$= \langle f(u) | f(v_0) \rangle - \langle f(u) | v_0 \rangle$
$= \langle u | v_0 \rangle - \langle u | v_0 \rangle$
$= 0$

$\Rightarrow \ker(f - id_E) \subset \mathrm{Im}(f - id_E)^\perp$

$\Rightarrow$ ——— = ———

b) $f \in O(E)$ $(f - id_E)^2 = 0$

$\Rightarrow \ker(f - id_E) \supset \mathrm{Im}(f - id_E)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f - id_E) \subset \mathrm{Im}(f - id_E)^\perp$

On $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. (par def. positivité)

Donc $\mathrm{Im}(f - id_E) = \{0_E\}$

$\Rightarrow \forall x \in E \; f(x) - id_E(x) = 0_E$

$\Rightarrow \forall x \in E \; f(x) = x$

$\Rightarrow f = id_E$.

Exercice 21 E euclidien u unitaire

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\forall x \in E \; f(x) = x - 2\langle x | u \rangle u$

$\|f(x)\|^2 = \langle f(x) | f(x) \rangle$

$= \langle x - 2\langle x|u\rangle u \mid x - 2\langle x|u\rangle u \rangle$

$= \langle x|x\rangle - 4\langle x|u\rangle^2 + 4\langle x|u\rangle^2 \|u\|^2$

$= \|x\|^2$

$\Rightarrow f$ isométrie vectorielle

Exercice 22 $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\Rightarrow A \in O(2)$ + A symétrique

$\Rightarrow A$ est une réflexion par rapport à

$\mathrm{Vect}\left(\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$ | réflexion % $\cos\frac{\theta}{2} e_1 + \sin\frac{\theta}{2} e_2$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta \equiv \frac{5\pi}{6} \; [2\pi]$

$\mathrm{Vect}\left(\left(\cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

Autre méthode : réflexion % E_1

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\sqrt{3} - 2)x + y = 0 \\ x + (\sqrt{3} - 2)y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 2x \\ x + \sqrt{3}y = 2y \end{cases}$

$\mathrm{Vect}((2 - \sqrt{3}, 1))$

$B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ rotation d'angle θ tq

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

//

Exercice 23 u isométrie de E euclidien.

$v = u - id_E$

? $\ker v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$?

$\dim \ker v = \dim (\mathrm{Im}\, v)^\perp$

soit $x \in \ker v$: $u(x) = x$

$y \in \mathrm{Im}\, v$ $y = v(y_0)$

$\langle x | y \rangle = \langle u(x) | v(y_0) \rangle$

$= \langle u(x) | u(y_0) - y_0 \rangle$

$= \langle u(x) | u(y_0) \rangle - \langle u(x) | y_0 \rangle$

$= \langle x | y_0 \rangle - \langle x | y_0 \rangle = 0$.

$\Rightarrow \ker v \subset (\mathrm{Im}\, v)^\perp$

+ in dim° $\Rightarrow \ker v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$

//

Exercice 24 $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\Omega \in O_n$

$\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(\Omega)$ $\Omega X = \lambda X$ $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\Omega \overline{X})^T \Omega X &= \overline{X}^T \Omega^T \Omega X \\ &= \overline{X}^T X \\ &= \Sigma |x_i|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Omega \overline{X})^T \Omega X &= (\overline{\Omega X})^T \Omega X \\ &= (\overline{\lambda X})^T \lambda X \\ &= (\overline{\lambda} \cdot \overline{X})^T \lambda X \\ &= \overline{\lambda} \lambda \overline{X}^T X \\ &= \overline{\lambda} \lambda \Sigma |x_i|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \overline{\lambda}\lambda = 1$

//

Exercice 25 (39)

E euclidien $\quad v \neq 0_E \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = x + \lambda \langle x | v \rangle . v$

a) CNS pour que $f \in O(E)$

$\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x + \lambda \langle x|v\rangle . v \mid y + \lambda \langle y|v\rangle . v \rangle$

$= \langle x|y\rangle + \lambda^2 \langle x|v\rangle\langle y|v\rangle \|v\|^2$

$+ \lambda \langle y|v\rangle\langle x|v\rangle$

$+ \lambda \langle x|v\rangle\langle y|v\rangle$

$\Rightarrow f \in O(E) \iff \lambda^2 \langle x|v\rangle\langle y|v\rangle \|v\|^2 \quad \forall (x,y)$

$= -2\lambda \langle x|v\rangle\langle y|v\rangle .$

$\iff$ (on prend $x, y \notin \langle v \rangle^\perp$ car sinon clair)

$\lambda = \frac{-2}{\|v\|^2}$ //

b) $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2} \Rightarrow f \in O(E)$

$x \neq 0_E \quad f(x) = \mu . x \iff x + \lambda \langle x|v\rangle . v = \mu . x$

$\iff (\mu - 1) x = \lambda \langle x|v\rangle . v$

$\mu \neq 1$: $\iff x \in \mathrm{Vect}(v)$. $x = a.v \quad a \neq 0$

$\mu - 1 \neq 0$

$\iff (\mu - 1) . a . v = \lambda . a \|v\|^2 . v$

$\iff (\mu - 1) . v = \lambda \|v\|^2 . v$

$\iff (\mu - 1) = \lambda \|v\|^2$

$(\mu - 1) = -2$

$\iff \mu = 1 - 2 = -1.$

$= Id_E - 2 p_{\langle v \rangle}$

ou $Id_E = p_{\langle v \rangle} + p_{\langle v \rangle^\perp}$

$\mu = -1 . \quad E_{-1} = \mathrm{Vect}(v).$

$= p_{\langle v \rangle^\perp} - p_{\langle v \rangle}$

$= 2 p_{\langle v \rangle^\perp} - Id_E$

v unitaire $\quad f(x) = x - 2\langle x|v\rangle . v \quad f = Id - 2 p_{\langle v \rangle}$

$= -(2p - Id_E)$

$\Rightarrow f = Id - 2 p_{\langle v \rangle} =$

C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\langle v \rangle^\perp$

Exercice 26 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $\sigma = ab+bc+ca$

$S = a+b+c$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

2) ? $M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S \in \{-1,1\}$?

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ ab+ac+bc=0 \\ ac+bc+ab=0 \\ bc+ab+ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ ab+bc+ac=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ \text{et} \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{cases} \qquad (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma = a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ \text{et} \\ S^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1$$

b) ? $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S = 1$?

$$\det M = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3 \\ &= a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2 \\ &\quad +b^3+c^3+3b^2c+3bc^2 \\ &= a^3+b^3+c^3 +3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2) \\ &\quad +6abc \\ &= a^3+b^3+c^3 +3a(ab+ac+bc) \\ &\quad +3b(ab+bc+ac) \\ &\quad +3c(ab+bc+ac) -3abc \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= \det(M) \end{aligned}$$

$\Rightarrow M \in SO_3 \Leftrightarrow (a+b+c)^3 = 1 \Leftrightarrow S = 1$

a) $M \in SO_3\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in [0, 4/27]$ tq a, b, c soient racines de $X^3 - X^2 + k$

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc$$

$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - X^2 - abc$

$f(x) = x^3 - x^2 + k \quad f'(x) = 3x^2 - 2x \quad f''(x) = 6x - 2$

	0		$1/3$		$2/3$	
f''		$-$	0	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$		0	$+$
f	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$f(2/3)$	$\nearrow$

$f(0) = k = -abc$ $\qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + k$

$= -\frac{4}{27} + k.$

CNS pour que $f(x) = x^3 - x^2 + k$ ait 3 racines reelles :

$k = -abc \geqslant 0$ et $-\frac{4}{27} + k \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad k \in \left[0 ; \frac{4}{27}\right]$

//

III Endomorphismes et matrices symétriques.

Exercice 22

$u \in \mathcal{L}(E)$ isométrie et symétrique. (*)

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ base orthonormée.

$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$

M isométrie $\Leftrightarrow$ $M^T M = I_n$

M symétrique $\Leftrightarrow$ $M = M^T$

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow$ $M^2 = I_n$.

$\Leftrightarrow$ $u^2 = Id_E$

$\Leftrightarrow$ u est une symétrie orthogonale parce les 2 sep E_1 et E_{-1} sont orthogonaux (d'après le Thm spectral)

$\Rightarrow$ Ce sont les symétries orthogonales.

//

Exercice 28

f, g symétriques

$f \circ g$ symétrique ssi $\forall u \in E \quad \langle u \mid f \circ g(u) \rangle = \langle f \circ g(u) \mid v \rangle$.

$\langle u \mid f \circ g(v) \rangle = \langle f(u) \mid g(v) \rangle$

$= \langle g \circ f(u) \mid v \rangle$.

On $\forall v$, $\langle f \circ g(u) \mid v \rangle = \langle g \circ f(u) \mid v \rangle$

$\Leftrightarrow \langle f \circ g(u) - g \circ f(u) \mid v \rangle = 0$

$\Leftrightarrow f \circ g(u) - g \circ f(u) \in E^{\perp} = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow f \circ g(u) - g \circ f(u) = 0_E$

$\Leftrightarrow \forall u \in E \quad f \circ g(u) = g \circ f(u)$

$\Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$

//

Exercice 29

(38)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3} A \in O_3$ $\qquad A = 3B$ avec $B \in O(3)$

or A symétrique réelle $\Rightarrow$ A se diagonalise dans une BON.

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & -1 \\ \lambda+3 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda+3 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (\lambda+3) \times \left[\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda-1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (\lambda+3) \times \left[(\lambda-1)(\lambda+2) - 4 - 2(\lambda+2) - 2 + 4 + \lambda - 1 \right]$$

$$= (\lambda+3) \times \left[(\lambda-1)(\lambda+2) - 2(\lambda+2) + \lambda - 3 \right]$$

$$= (\lambda+3)(\lambda^2 - 9) = (\lambda-3)(\lambda+3)^2$$

$Sp(A) = \{3; -3\}$ $\qquad m(3) = 1$ $\quad m(-3) = 2$

$$E_3(A) \quad \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 5z = 0 \\ 12y + 24z = 0 \\ 6y + 12z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5z = z \\ y = -2z \end{cases} \quad E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-3}(A) \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$E_{-3}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $E_3(A)$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrent $E_{-3}(A)$

il suffit de les orthonormaliser : (Gram-Schmidt)

$\|u_1\| = \sqrt{6}$ $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot u_1$

$\langle e_1 | u_2 \rangle = 0$ $\quad \langle e_1 | u_3 \rangle = 0$.

(c'est normal : $u_1 \in E_{-3}(A)^\perp$)

$\|u_2\| = \sqrt{2}$ $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u_2$

$\langle e_2 | u_3 \rangle = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow v_3 = u_3 - \langle e_2 | u_3 \rangle \cdot e_2$

$= u_3 - \sqrt{2} \cdot e_2 = u_3 - u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_3\| = \sqrt{3} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

est une BON de vecteurs propres $\quad P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Dans cette base

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

directe ?

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

oui la base est directe (ou calculer $\det(e_1, e_2, e_3)$)

Exercice 30

$E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$

$\varphi : P \longmapsto XP'' + (1-X)P'$ $\quad \varphi(P) \in E$

+ φ linéaire par linéarité de la dérivation.

$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}(E)$

Montrer que φ est auto-adjoint.

$$\langle P | \varphi(Q) \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) \left(t Q''(t) + (1-t) Q'(t) \right) e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} P(t)\, t Q''(t)\, e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} P(t)(1-t) Q'(t) e^{-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} P(t)(1-t) Q'(t) e^{-t} dt =$$

IPP

$u = P(t)(1-t)e^{-t}$ $\quad u' = P'(t)(1-t)e^{-t} + P(t)\left[(t-1)e^{-t} - e^{-t}\right]$

$v = Q(t)$ $\quad v' = Q'(t)$

$$= \underbrace{\left[P(t)(1-t)e^{-t} Q(t) \right]_0^{+\infty}}_{= P(0)Q(0)} - \int_0^{+\infty} Q(t) P'(t)(1-t)e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} Q(t) P(t) \left[t-2 \right] e^{-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} P(t)\, t Q''(t) e^{-t} dt$$

$u = P(t)\, t e^{-t}$

$u' = P'(t)\, t e^{-t} + P(t)\left(e^{-t} - t e^{-t} \right)$

$= P'(t)\, t e^{-t} + (1-t) P(t) e^{-t}$

$v' = Q''(t)$ $\quad v = Q'(t)$

$$= \underbrace{\left[Q'(t) P(t)\, t e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{= 0} - \int_0^{+\infty} P'(t)\, t e^{-t} Q'(t) dt - \int_0^{+\infty} (1-t) P(t) e^{-t} Q'(t) dt$$

$$\int_0^{+\infty} (1-t) P(t) e^{-t} Q'(t) dt$$

$u = (1-t) P(t) e^{-t}$ $\quad u' = P'(t)(1-t)e^{-t} + P(t)(1-e^{-t}) - (1-t)e^{-t}$

$v = Q(t)$ $\quad v' = Q'(t)$

$$= \underbrace{\left[(1-t) P(t) e^{-t} Q(t) \right]_0^{+\infty}}_{= P(0)Q(0)} - \int_0^{+\infty} P'(t)(1-t) e^{-t} Q(t) dt + \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} (2-t) Q(t) dt$$

$$\int_0^{+\infty} P'(t)\, t e^{-t} Q'(t)\, dt \qquad \begin{aligned} u &= P'(t)\, t e^{-t} \\ u' &= P''(t)\, t e^{-t} \\ &\quad + P'(t)\left(e^{-t} - t e^{-t}\right) \\ v' &= Q'(t) \qquad v = Q(t) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left[P'(t)\, t e^{-t} Q(t)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int P''(t)\, t e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$- \int P'(t)(1-t) e^{-t} Q(t)\, dt$$

Finalement :

$$\langle P \mid \varphi(Q) \rangle = P(0)Q(0) - \int_0^{+\infty} P'(t)(1-t) e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$- \int_0^{+\infty} P(t)(t-2) e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} P''(t)\, t e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} P'(t)(1-t) e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$- P(0)Q(0) + \int_0^{+\infty} P'(t)(1-t) e^{-t} Q(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t}(2-t)\, Q(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \langle P \mid \varphi(Q) \rangle = \int_0^{+\infty} Q(t)\, P''(t)\, t e^{-t}\, dt + \int_0^{+\infty} Q(t)\, P'(t)(1-t) e^{-t}\, dt$$

$$= \langle \varphi(P) \mid Q \rangle$$

Exercice 31 (39)

E euclidien de dim^e $n \geq 2$
a vecteur unitaire de E
$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

a) $f(x) = x + k \langle x|a\rangle a$ auto adjoint ?

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid y\rangle &= \langle x + k\langle x|a\rangle a \mid y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle + k\langle x|a\rangle\langle a|y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle + k\langle y|a\rangle\langle x|a\rangle \\ &= \langle x \mid y + k\langle y|a\rangle a\rangle \\ &= \langle x \mid f(y)\rangle \Rightarrow f \text{ auto-adjoint}\end{aligned}$$

b) $f = Id_E + k.p$ $\quad$ p : projecteur sur $\mathrm{Vect}(a)$

λ v.p de $f \iff \exists x \neq 0_E \quad f(x) = \lambda x$
$\iff$ ——— $\lambda x = x + k.p(x)$
$\iff$ ——— $(\lambda - 1)x = k.p(x)$

$\Rightarrow$ si $\lambda = 0$ $\quad x + k.p(x) = 0_E$
$\Rightarrow x$ v.p de p de v.p $-\frac{1}{k}$.

p projecteur $\Rightarrow -\frac{1}{k} = 1 \Rightarrow k = -1$ impossible

Autrement dit : les valeurs propres de f sont celles de id_E = 1 + $k \times$ celles de p propres = k donc $1+k$ et $1 \neq 0 \Rightarrow f$ bijectif

Ainsi $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre de $f \Rightarrow f$ bijectif

c) f auto-adjoint $\Rightarrow$ (Thm spectral) f diagonalisable dans une B.O.N.

Valeurs propres : $1+k$ et 1
(car $x \neq 0_E$ est vecteur propre de f si il est vecteur propre de p et $f(x) = x + k.p(x)$
$= x + k.\lambda x = (1+k\lambda).x$

v.p de p projecteur : $\lambda = 0$ ou 1
Sep : ceux de p : $\mathrm{Im}\,p$ et $\ker p$.

Exercice 32 a) p projecteur de E euclidien.
? p orthogonale ssi p symétrique ?

p orthogonale ssi $\forall x \in E \ \langle p(x) - x \mid p(x) \rangle = 0$
$\iff$ $\langle p(x) \mid p(x) \rangle - \langle x \mid p(x) \rangle = 0$

p symétrique ssi $\forall x, y \in E \ \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$

($\Leftarrow$) Soit p un projecteur auto-adjoint
$x \in \ker p \quad y \in \ker p$
$\langle x \mid y \rangle = \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle = \langle x \mid 0_E \rangle = 0$
$\Rightarrow x \perp y \Rightarrow \operatorname{Im} p \perp \ker p$
$\Rightarrow p$ est un projecteur $\perp^{al}$

($\Rightarrow$) Soit p un projecteur orthogonal : $\operatorname{Im} p = \ker p^{\perp}$

$$\langle x \mid p(y) \rangle = \underbrace{\langle x - p(x) \mid p(y) \rangle}_{=0} + \langle p(x) \mid p(y) \rangle$$
$$= \langle p(x) \mid p(y) - y + y \rangle$$
$$= \langle \underbrace{p(x) \mid p(y) - y}_{=0} \rangle + \langle p(x) \mid y \rangle$$
$$= \langle p(x) \mid y \rangle \Rightarrow p \text{ auto-adjoint}$$

b) p, q projecteurs orthogonaux.

$$\langle x \mid p \circ q \circ p(y) \rangle = \langle p(x) \mid q \circ p(y) \rangle$$
$$= \langle q \circ p(x) \mid p(y) \rangle$$
$$= \langle p \circ q \circ p(x) \mid y \rangle$$
$\Rightarrow p \circ q \circ p$ auto-adjoint

//

Exercice 33 ~~2) p projecteur de E euclidien.~~

2) $(x,y) \longmapsto x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)$

- bilinéaire symétrique évident.
- positive : $x_1y_1 + 5x_1y_1 - 2(x_1y_1 + x_1y_1)$
  $= 2x_1y_1$
  faux ! prendre $x = (1,-1)$
  $\langle x|x\rangle < 0$

Exercice 34 f auto-adjoint tq $\forall x \in E \quad \langle f(x)|x\rangle = 0$

(40)

Déterminer f.

$\forall x,y \in E \quad \langle f(x)|y\rangle = \left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right) \middle| \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right\rangle$

$= \left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) \middle| -\frac{x-y}{2} \right\rangle + \left\langle f\left(\frac{x-y}{2}\right) \middle| \frac{x+y}{2} \right\rangle$

$= \left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) \middle| -\frac{x-y}{2} \right\rangle + \left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) \middle| \frac{x-y}{2} \right\rangle$

$= -\left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) \middle| \frac{x-y}{2} \right\rangle + \left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right) \middle| \frac{x-y}{2} \right\rangle$

$= 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \subset E^\perp = \{0_E\} \Rightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

//

Exercice 35 — u endomorphisme auto-adjoint de E euclidien.

$k = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$ (existe d'après le thm spectral)

? $\|u(x)\| \leq k\|x\|$?

$\Leftrightarrow \langle u(x) | u(x) \rangle \leq k^2 \langle x | x \rangle$

$\Leftarrow \langle u(x) | u(x) \rangle \leq \langle kx | kx \rangle$

$0 \leq \langle u(x) + k(x) \mid u(x) + kx \rangle = 2\langle u(x) | kx \rangle + \langle u(x) | u(x) \rangle + \langle kx | kx \rangle$

v_1 vecteur propre associé à λ_1.

$\langle u(v_1) | u(v_1) \rangle = k^2 \langle v_1 | v_1 \rangle$.

u diagonalisable : base orthonormée $v_1, \dots, v_n$ de vecteurs propres.

$x = \sum x_i v_i \qquad u(x) = \sum \lambda_i x_i v_i$

$\langle u(x) | u(x) \rangle = \left\langle \sum \lambda_i x_i v_i \mid \sum \lambda_i x_i v_i \right\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\langle x_i v_i | x_j v_j \rangle}_{= 0 \text{ si } i \neq j}$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2$

$\leq \lambda_1^2 \sum x_i^2 = \lambda_1^2 \cdot \langle x | x \rangle$

$\lambda_1 = k \qquad \langle u(x) | u(x) \rangle \leq k^2 \langle x | x \rangle$

$\Rightarrow \|u(x)\| \leq k\|x\|$