

Complément :

Effet d'un changement d'ordre de sommation sur une série

<http://www.jean-philippe-preaux.fr>

TABLE DES MATIÈRES

1.	Problématique	1
2.	Réponse positive dans le cas de termes positifs ou d'absolue convergence	2
3.	Réponse négative dans le cas de séries semi-convergentes	2

1. PROBLÉMATIQUE

Comment sommer une quantité infini dénombrable de nombres ?

Soit A un ensemble infini dénombrable de réels ou complexes. Puisque A est dénombrable, on peut utiliser une bijection $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ pour numéroter les éléments de $A : a_0 = \phi(0), a_1 = \phi(1), a_2 = \phi(2), \dots, a_k = \phi(k), \dots$, puis considérer la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Seulement il existe une infinité de bijections de \mathbb{N} vers A puisque pour tout bijection $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\phi \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow A$ est un bijection de \mathbb{N} vers A , différente dès que $\psi \neq Id_{\mathbb{N}}$. Ce qui donne lieu à une infinité de série numériques $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\psi(n)}$, obtenues l'une de l'autre par permutation du terme général.

La question qui se pose alors est : change-t-on la nature ou la somme d'une série numérique en permutant l'ordre de sommation de ses termes ?

Est-ce que la permutation de l'ordre de sommation des termes d'une séries numériques conserve sa nature et sa somme ? Autrement dit :

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Les séries :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

ont-elles même nature et si oui, en cas de convergence ont-elles même somme ?

En général la réponse est non, comme le montre l'exemple suivant avec la série harmonique alternée :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \ln 2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots \end{aligned}$$

réarrangeons l'ordre de sommation :

$$\stackrel{?}{=} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots$$

en effet \mathbb{N}^* se partitionne en : $\mathbb{N}^* = \underbrace{\{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}}_{\text{impairs}} \cup \underbrace{\{4k-2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}}_{\text{doubles d'impairs}} \cup \underbrace{\{4k \mid k \in \mathbb{N}^*\}}_{\text{doubles de pairs}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \ln 2 \end{aligned}$$

On constate que la permutation dans l'ordre de sommation à changé la somme ! L'addition est commutative quand on somme un nombre fini de termes, mais pas quand on somme un nombre infini (dénombrable) de termes !

2. RÉPONSE POSITIVE DANS LE CAS DE TERMES POSITIFS OU D'ABSOLUE CONVERGENCE

La réponse est positive lorsque la suite (a_n) est à valeurs réelles positives ; et c'est facile à établir :

PROPRIÉTÉ 1. (Permutation de l'ordre de sommation pour une série à termes positifs)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Les séries :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

ont même nature et même somme éventuelle.

Démonstration. On rappelle que dans ce cas la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ est croissante et (d'après le théorème de la limite monotone) converge ssi elle est majorée, dans quel cas vers $L = \sup\{S_N \mid N \in \mathbb{N}\}$. Supposons que c'est le cas.

Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $m(N) = \max(\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N))$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$S'_N = \sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{m(N)} a_n = S_{m(N)} \leq L$$

puisque tous les termes dans la somme de gauche apparaissent dans celle de droite ajoutés à d'autres termes (éventuels) positifs. En particulier la suite des sommes partielles S'_N est majorée et converge donc vers $L' \leq L$.

Mais le même argument appliqué en échangeant les rôles des deux séries, montre alors que si la deuxième série converge vers L' alors la première converge vers $L \leq L'$. Ainsi d'une part les deux séries ont même nature aussi, et d'autre part en cas de convergence, $L = L'$: elles ont même somme. ■

Le résultat se généralise lorsque la série est absolument convergente :

PROPRIÉTÉ 2. (Permutation de l'ordre de sommation pour une série absolument convergente)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$; si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge absolument alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ converge absolument et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Démonstration. Que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ converge absolument découle immédiatement de la proposition 1. Il reste à montrer que les deux séries ont même somme (la proposition 1 ne donne que : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{\sigma(n)}|$).

On reprend l'argument utilisé pour montrer que la convergence absolue entraîne la convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit :

$$a_n^+ = \max(a_n, 0) \quad a_n^- = \max(-a_n, 0)$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n^+, a_n^- \geq 0 \quad \text{et} \quad a_n = a_n^+ - a_n^- \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

De $0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$ on déduit par convergence absolue la convergence des séries à termes positifs $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ puis par combinaison linéaire la convergence de $\sum a_n^+ - a_n^- = \sum a_n$. Mais d'après la proposition 1, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- \end{array} \right\} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - a_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

3. RÉPONSE NÉGATIVE DANS LE CAS DE SÉRIES SEMI-CONVERGENTES

Le résultat est assez surprenant ; il est dû à Riemann : dans le cas d'une série à termes réels semi-convergente (c'est à dire convergente mais pas absolument convergente) on peut changer l'ordre de sommation pour obtenir la limite que l'on souhaite ; le résultat est :

THÉORÈME 3. (De réarrangement de Riemann)

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ une série semi-convergente ; quelque soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} = L.$$

Démonstration. (Esquisse.)

Elle est simple à comprendre et un peu technique à écrire rigoureusement.

On scinde la suite $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des termes de la séries en deux suites $(p_n)_n$ (resp. $(q_n)_n$) des termes positifs (resp. négatifs), et ce dans l'ordre où ils apparaissent dans $(a_n)_n$. Alors remarquons que :

- $a_n, p_n, q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ puisque $\sum a_n$ converge.
- Les séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$ divergent toutes deux vers $\pm\infty$.
 - En effet si elles convergeaient toutes deux alors la série $\sum |a_n|$ serait convergente comme somme de séries convergentes ($\sum p_n = \sum a_n^+$ et $\sum q_n = \sum a_n^-$ et $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ avec les notations de la preuve précédente).
 - Si l'une convergeait et l'autre divergeait alors la série $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum p_n - \sum q_n$ divergerait comme différence d'une série convergente et d'une série divergente.
 - Étant à termes de signes constants, diverger revient à tendre vers $\pm\infty$.

Premier cas. Traitons le cas où la limite souhaitée L est un réel positif.

On somme successivement les termes positifs de la suite $(p_n)_n$ jusqu'à ce que la somme dépasse L . C'est possible puisque $\sum_{n=0}^N p_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Puis on somme successivement les termes négatifs de la suite $(q_n)_n$ jusqu'à ce que la somme repasse sous L . C'est possible puisque $\sum_{n=0}^N q_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Et on continue ainsi en sommant les termes positifs suivant jusqu'à repasser au dessus de L puis les termes négatifs jusqu'à repasser sous L et ainsi de suite.

Après avoir sommé n termes, on aura sommé les termes de 0 à n_1 de la suite (p_n) ainsi que les termes de 0 à n_2 de la suite (q_n) (donc $n = n_1 + n_2 + 2$). Par construction, en appelant S_n cette somme :

$$|L - S_n| \leq \max(|p_{n_1}|, |q_{n_2}|) \leq \min(|a_{n_1}|, |a_{n_2}|)$$

Or par construction n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; ainsi par composition des limites et :

$$|L - S_n| \leq \min(|a_{n_1}|, |a_{n_2}|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

et donc $S_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} L$. L'ordre de sommation donne la bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ souhaitée.

Deuxième cas. Traitons le cas où la limite souhaitée L est $+\infty$.

Prenons $A \in \mathbb{N}$ quelconque, par exemple $A = 1000$; on somme successivement les termes de la suite $(p_n)_n$ jusqu'à dépasser $A + |q_0|$ (c'est possible puisque $\sum p_n$ diverge vers $+\infty$); soit n_1 le premier entier tel que $p_0 + p_1 + \dots + p_{n_1} \geq A + |q_0|$; cela nous donne un rang $N_A = n_1 \in \mathbb{N}$ pour lequel nous allons voir que la somme partielle obtenue S_n est $\geq A$ dès que $n \geq N_A$.

On somme ensuite successivement les termes de la suite (q_n) tant que la somme reste au dessus de A ; on sommera au moins un élément de la suite (q_n) (puisque $p_0 + p_1 + \dots + p_{n_1} + q_0 \geq A$) et seulement en nombre fini puisque $\sum_{n=0}^N q_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} -\infty$; soit n_2 le dernier entier pour lequel $p_0 + \dots + p_{n_1} + q_0 + \dots + q_{n_2-1} \geq A$. Pour tout entier n entre $N_A = n_1$ et $N_A + n_2$ on a bien $S_n \geq A$.

On somme ensuite les termes suivants de la suite (p_n) jusqu'à dépasser $A + 1 + |q_{n_2}|$ -ce qui nous donne un rang N_{A+1} - puis les termes de (q_n) (au moins un!) tant que la somme reste $\geq A + 1$. Pour tout entier $n \geq N_{A+1}$ on aura $S_n \geq A + 1$.

En poursuivant ce procédé on finit par sommer tous les termes de la suite (a_n) pour obtenir une somme partielle S_n vérifiant que pour tout $A > 0$ il existe un rang N tel que $n \geq N \implies S_n \geq A$. Autrement dit en réarrangeant l'ordre de sommation des termes on a obtenu une série qui diverge vers $+\infty$.

Les cas restants ($L < 0$ se traitent de manière analogue). ■

Exemple. On peut réarranger l'ordre de sommation des termes de la série harmonique alternée pour la faire tendre vers la limite de son choix.

Remarque. En appliquant le même argument on peut aussi voir qu'un réarrangement permet d'obtenir une série n'ayant aucune limite : sommer les termes positifs jusqu'à dépasser 1, puis les négatifs jusqu'à dépasser -1, puis encore les positifs jusqu'à dépasser 1, etc... fonctionnera par le même argument pour donner une série qui n'a aucune limite.

En conclusion :

Réarranger l'ordre de sommation des termes d'une série :

- Ne change pas la nature et la somme éventuelle pour une série à termes positifs.
- Ne change pas l'absolue convergence ni la somme pour une série absolument convergente.
- Change radicalement nature et somme éventuelle pour une série semi-convergente.

D'où la difficulté de sommer une quantité dénombrable de nombres :

- Pour des nombres positifs, on peut fixer un ordre sur les éléments et définir la somme comme celle de la série obtenue. Ses nature et somme éventuelle ne dépendront pas de l'ordre choisi.

- Pour des nombres quelconques, on peut fixer un ordre sur les éléments et requérir la convergence absolue de la série obtenue. La somme sera alors la somme de cette série. Elle ne dépendra pas de l'ordre choisi.

- Pour des nombres quelconques, en l'absence de convergence absolue, la famille n'est pas sommable. Sans ordre de sommation la somme des éléments n'est pas défini.

Voir la notion de "sommabilité" en préambule du chapitre "Variables aléatoires réelles".