Semaine 6
du 6 au 10 novembre 2024

- **Question de cours.** Une à montrer parmi :
  - Nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et majoration de son reste d'ordre n en cas de convergence.
  - Comparaison série-intégrale.
  - Théorème spécial des séries alternées.

- **Chapitre 4** Intégrales généralisées

– Intégrale impropre; notation $\int_{[a,b[} f$, $\int_a^b f$, (etc.) pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle (a,b) ; convergence, divergence.'

– Premières propriétés : Chasles, Linéarité, Positivité, croissance. Si f est positive et continue sur un intervalle I, et si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

– Cas des fonctions positives :
- Caractérisation de la convergence : $\int_{[a,b[} f$ converge ssi la fonction $x \longmapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a,b[$.
- Théorèmes de comparaison : $\leq$, o, O, $\sim$

– Convergence absolue; fonction intégrable.

– La convergence absolue entraine la convergence et $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

– Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables : $|f| \leq |g|$, o, O, $\sim$.

– $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

– Intégrales de fonctions de référence : Riemann en l'infini, 0^+ et a^+ ; ln en 0^+ et $+\infty$; $t \longmapsto e^{-at}$ sur $\mathbb{R}_+$.

– Si $\int_{[a,+\infty[} f$ converge, et si $lim_{+\infty} f$ existe, alors $\lim_{+\infty} f = 0$.

– Changement de variable : soit ϕ une bijection C^1 de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ strictement croissante. Alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ ont même nature, et en cas de convergence sont égales. Adaptation au cas strictement décroissant.

– Intégration par partie : si f est g sont de classe C^1 sur $[a,b[$ et si $\lim_{b^-} fg$ existe et est finie alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ ont même nature et en cas de convergence : $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

- **Chapitre 5** Séries numériques

– Séries numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$; convergence, divergence. Propriétés générales.

– Séries géométriques, séries de Riemann, série harmonique, harmonique alternée, séries exp, cos et sin.

– Séries à termes positifs. Critère de convergence. Théorèmes de comparaison. Règle de d'Alembert. Règle de Riemann.

– Comparaison série-intégrale.

– Série à termes quelconques. Convergence absolue. L'absolue convergence entraine la convergence. Inégalité triangulaire.

– Théorème de comparaison pour des séries à termes quelconques.

– Séries alternées. Critère spécial des séries alternées.

– Produit de Cauchy. Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes converge absolument; sa somme est le produit des deux séries.