

Semaine 5

du 14 au 18 octobre 2024

• **Question de cours.** Une à montrer parmi :

- Nature de l'intégrale de Bertrand $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$.
- Nature des séries de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$; majoration du reste R_n à l'ordre n en cas de convergence.
- Divergence de la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$. Convergence et calcul de la série harmonique alternée $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

• **Chapitre 4** Intégrales généralisées

- Intégrale impropre; notation $\int_{[a,b[} f$, $\int_a^b f$, (etc.) pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle (a, b) ; convergence, divergence.
- Premières propriétés : Chasles, Linéarité, Positivité, croissance. Si f est positive et continue sur un intervalle I , et si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.
- Cas des fonctions positives :
 - Caractérisation de la convergence : $\int_{[a,b[} f$ converge ssi la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a, b[$ (et mêmes résultats sur $]a, b]$ et $]a, b[$).
 - Théorèmes de comparaison : \leq, o, O, \sim
- Convergence absolue; fonction intégrable.
- La convergence absolue entraîne la convergence et $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.
- Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables : $|f| \leq |g|, o, O, \sim$.
- $L^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- Intégrales de fonctions de référence : Riemann en l'infini, 0^+ et a^+ ; \ln en 0^+ et $+\infty$; $t \mapsto e^{-at}$ sur \mathbb{R}_+ .
- Si $\int_{[a,+\infty[} f$ converge, et si $\lim_{+\infty} f$ existe, alors $\lim_{+\infty} f = 0$.
- Changement de variable : soit ϕ une bijection \mathcal{C}^1 de $]a, \beta[$ sur $]a, b[$ strictement croissante. Alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ont même nature, et en cas de convergence sont égales. Adaptation au cas strictement décroissant.
- Intégration par partie : si f est g sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$ et si $\lim_{b^-} fg$ existe et est finie alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ ont même nature et en cas de convergence : $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

• **Chapitre 5** Séries numériques

- Séries numériques à valeurs dans \mathbb{K} ; convergence, divergence. Propriétés générales.
- Séries géométriques, séries de Riemann, série harmonique, harmonique alternée.

Remarque : les séries n'ont pas encore été abordées en TD. Pas d'exercice sur les séries!