

Semaine 18

du 10 au 14 mars 2025

- **Question de cours.** Démontrer l'une des propositions suivantes :
- Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lambda > 0$ tel que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$; alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

(autrement dit (X_n) "converge en loi" vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$).

- Pour une VAD X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$.
- Inégalité de Markov + Inégalité de Bienaymé-Tchebychev + loi faible des grands nombres :
 - Soit X une VADR positive d'espérance finie :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(X)$$

- Soit X une VADR admettant un moment d'ordre 2 :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- Soit $(X_n)_n$ une suite de VADR i.i.d. admettant un moment d'ordre 2 ; en posant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(autrement dit $\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right)$ "converge en probabilité" vers la loi certaine égale à $E(X_1)$).

- **Chapitre 11** Variables aléatoires discrètes

- Préambule introductif et non exigible sur la sommabilité d'une famille de complexes.
- Variable aléatoire discrète ; loi d'une VAD. Variable aléatoire conditionnée par un événement non négligeable. Couples et vecteurs de VAD ; loi conjointe, lois marginales.
- Indépendance de deux VAD, indépendance mutuelle de n VAD. Caractérisations ; Lemmes des coalitions.
- Lois usuelles : Certaine, Uniforme, Bernoulli, Binomiale, Géométrique ; Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
- Espérance d'une VAD à valeurs réelles ou complexes ; cas particuliers de VAD à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, $\overline{\mathbb{N}}$. Formule de transfert, positivité, croissance, linéarité, espérance du produit de VAD indépendantes. Espérance des lois usuelles.
- Moments d'une VADR, variance d'une VADR, structure de $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Espérance du produit de VADR admettant un moment d'ordre 2. Variance des lois usuelles.
- Covariance, propriétés ; lien avec l'indépendance ; inégalité de Cauchy-Schwarz ; coefficient de corrélation ; variance d'une somme.
- Fonction (ou série) génératrice $G_X(t) = E(t^X)$ d'une VAD X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Propriétés analytiques. La fonction génératrice caractérise la loi. Calcul de l'espérance et de la variance. Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes. Fonctions génératrices des lois usuelles.
- Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.