

Semaine 17

du 10 au 14 février 2025

• **Question de cours.** Une à montrer parmi :

- Continuité monotone : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; alors :
 - si (A_n) est croissante, $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$, et
 - si (A_n) est décroissante, $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.
- Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lambda > 0$ tel que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$; alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

(autrement dit (X_n) "converge en loi" vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$).

- Pour une VAD X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$.

• **Chapitre 10** Probabilités

- Tribus ; espaces probabilisables (d'univers fini, ou infini dénombrable ou indénombrable). Stabilité d'une tribu par opérations ensemblistes. Une intersection quelconques de tribus est une tribu.
- Probabilité. Propriétés. Continuité monotone. Sous-additivité dénombrable. Événements négligeables, presque sûrs.
- Probabilité conditionnelle. $\mathbb{P}_B$ est une mesure de probabilité. Formule des probabilités totales. Formule des probabilités composées. Formule de Bayes.
- Indépendance. Propriétés. Indépendance mutuelle.

• **Chapitre 11** Variables aléatoires discrètes

- Préambule introductif et non exigible sur la sommabilité d'une famille de complexes.
- Variable aléatoire discrète ; loi d'une VAD. Variable aléatoire conditionnée par un événement non négligeable. Couples et vecteurs de VAD ; loi conjointe, lois marginales.
- Indépendance de deux VAD, indépendance mutuelle de n VAD. Caractérisations ; Lemmes des coalitions.
- Lois usuelles : Certaine, Uniforme, Bernouilli, Binomiale, Géométrique ; Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
- Espérance d'une VAD à valeurs réelles ou complexes ; cas particuliers de VAD à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, $\overline{\mathbb{N}}$. Espérance des lois usuelles. Formule de transfert, positivité, croissance, linéarité.