

## Semaine 15

du 27 au 31 janvier 2025

- **Question de cours.** Une à montrer parmi :

- Conservation de la continuité par limite uniforme : si la suite de fonctions  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  converge uniformément vers  $f$ , et si les  $f_n$  sont continues sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .
- Règle de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière.
- Les séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

- **Chapitre 8** Suites et séries de fonctions

- Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment, d'une suite de fonctions.
- Norme  $\| \cdot \|_\infty$  de la convergence uniforme.
- La convergence uniforme implique la convergence simple.
- Théorème de continuité d'une limite uniforme. Théorème d'intégration sur un segment d'une limite uniforme. Théorème de dérivabilité  $\mathcal{C}^1$  d'une limite, de dérivabilité  $\mathcal{C}^p$ .
- Convergence simple, uniforme, normale (resp. sur tout segment) d'une série de fonctions.
- Caractérisation de la CVU :  $\sum u_n$  CVU ssi la suite des restes  $(R_n)$  CVU vers la fonction nulle.
- Caractérisation de la CVN :  $\sum u_n$  CVN ssi la série numérique  $\sum \|u_n\|_\infty$  converge.
- La convergence normale implique la convergence uniforme et  $\| \sum u_n \|_\infty \leq \sum \|u_n\|_\infty$ .
- Théorème de continuité de la somme uniforme.
- Théorème d'interversion limite/somme uniforme.
- Théorème d'intégration terme à terme sur un segment d'une somme uniforme.
- Théorème de dérivation  $\mathcal{C}^1$  terme à terme, de dérivation  $\mathcal{C}^p$ .

- **Chapitre 9** Séries entières

- Séries entières de la variable réelle ou complexe. Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Disque/intervalle ouvert de convergence (absolue). Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Continuité de la somme.
- Calcul du rayon de convergence. Règle de d'Alembert. Comparaison de rayons de convergence. Rayon de convergence et opérations algébriques (combinaison linéaire, produit), dérivation, primitivation.
- Propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle : Primitivation/Intégration terme à terme sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme de la somme. Caractère  $C^\infty$  et expression des coefficients à l'aide des dérivées successives.
- Fonctions développables en séries entières. Unicité du développement. Développements en séries entières usuels :  $\frac{1}{1 \pm z}$ ,  $\ln(1 \pm x)$ ,  $e^z$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{Arctan}(x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ .