Semaine 13
du 13 au 17 janvier 2025

• **Question de cours.** Une à montrer parmi :
  - $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable ssi χ_u scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
  - $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_u scindé.
  - Critère de diagonalisabilité des matrices de rang 1 : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 est diagonalisable ssi $tr(M) \neq 0$.

• **Chapitre 7** Réduction des endomorphismes.
- Valeur propre, vecteur propre, spectre $\mathrm{Sp}(u)$, d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.
- Caractérisation des valeurs propres λ de $u \in \mathscr{L}(E)$ à l'aide de l'endomorphisme $\lambda.\mathrm{id}_\mathrm{E} - u$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ alors les valeurs propres de u sont racines de P.
- Sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Valeur propre, vecteur propre d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; retranscription aux matrices carrées de tous les résultats sur les endomorphismes.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; $\det(X.I_n - M) : x \longmapsto \det(x.I_n - M)$ est une fonction polynômiale de degré n de la forme :
$$\det(X.I_n - M) = X^n - \mathrm{tr}(M).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$
- Polynôme caractéristique χ_M d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Propriétés : ses racines sont les valeurs propres ; deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ; $\chi_{M^\mathcal{T}} = \chi_M$; polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$. Propriétés.
- Si F est stable par u et u_F est l'endomorphisme induit sur F, alors χ_{u_F} divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$.
- Ordre de multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre λ ; il majore la dimension de l'espace propre $E_\lambda(u)$: $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$.
- Théorème de Hamilton-Cayley.
- Endomorphismes/matrices diagonalisables. Caractérisation : Existence d'une base (de $E/\mathscr{M}_{n,1}(K)$) constituée de vecteurs propres.
- Caractérisation : $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable ssi les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E ssi $\dim(E) = \sum \dim(E_\lambda(u))$.
- Caractérisation des homothéties, projections et symétries non triviales comme des endomorphismes diagonalisables et en fonction de leurs valeurs propres.
- Condition suffisante de diagonalisabilité : χ_u scindé à racines simples ou de manière équivalente $\#Sp(u) = \dim(E)$.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : χ_u scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
- Condition nécessaire de diagonalisabilité : χ_u scindé.

- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples ; ou encore que $P(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda_i)$ soit un polynôme annulateur.
- Si F est stable par u et si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.
- Endomorphisme/matrice trigonalisable.
- Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité : que le polynôme caractéristique soit scindé.
- Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, toute matrice/endomorphisme est trigonalisable ; trace/déterminant sont somme/produit des valeurs propres complexes.
- Exemples d'applications : Calcul des puissances d'une matrice ; Suites récurrentes linéaires (matrice diagonalisable à valeurs propres distinctes) ; Système différentiel linéaire (matrice diagonalisable à valeurs propres distinctes).