

## Semaine 12

du 16 au 20 décembre 2024

• **Question de cours.** Une à montrer parmi :

- Les valeurs propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont racines de tout polynôme annulateur de  $u$ .
- Les sous-espaces propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont en somme directe.
- $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable ssi  $\chi_u$  scindé et  $\forall \lambda \in Sp(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ .

• **Chapitre 7 Réduction des endomorphismes.**

- Valeur propre, vecteur propre, spectre  $Sp(u)$ , d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
- Caractérisation des valeurs propres  $\lambda$  de  $u \in \mathcal{L}(E)$  à l'aide de l'endomorphisme  $\lambda \cdot \text{id}_E - u$ .
- Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme annulateur de  $u \in \mathcal{L}(E)$  alors les valeurs propres de  $u$  sont racines de  $P$ .
- Sous-espaces propres  $E_\lambda(u)$ .
- Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Valeur propre, vecteur propre d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; retranscription aux matrices carrées de tous les résultats sur les endomorphismes.
- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ;  $\det(X.I_n - M) : x \mapsto \det(x.I_n - M)$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  de la forme :

$$\det(X.I_n - M) = X^n - \text{tr}(M).X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M).$$

- Polynôme caractéristique  $\chi_M$  d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Propriétés : ses racines sont les valeurs propres; deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique;  $\chi_{M^T} = \chi_M$ ; polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Propriétés.
- Si  $F$  est stable par  $u$  et  $u_F$  est l'endomorphisme induit sur  $F$ , alors  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- Ordre de multiplicité  $m(\lambda)$  d'une valeur propre  $\lambda$ ; il majore la dimension de l'espace propre  $E_\lambda(u)$  :  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$ .
- Théorème de Hamilton-Cayley : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.
- Endomorphismes/matrices diagonalisables. Caractérisation : Existence d'une base (de  $E/\mathcal{M}_{n,1}(K)$ ) constituée de vecteurs propres.
- Caractérisation :  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable ssi les sous-espaces propres sont supplémentaires dans  $E$  ssi  $\dim(E) = \sum \dim(E_\lambda(u))$ .
- Caractérisation des homothéties, projections et symétries non triviales comme des endomorphismes diagonalisables et en fonction de leurs valeurs propres.
- Condition suffisante de diagonalisabilité :  $\chi_u$  scindé à racines simples ou de manière équivalente  $\#Sp(u) = \dim(E)$ .
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :  $\chi_u$  scindé et  $\forall \lambda \in Sp(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ .
- Condition nécessaire de diagonalisabilité :  $\chi_u$  scindé.