Semaine 10
du 2 au 6 décembre 2024

- **Question de cours.** Une à montrer parmi :
  - Les p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si, $\forall(f_1, f_2, \ldots, f_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = O_E \implies f_1 = f_2 = \cdots = f_p = O_E.$$

  - Donné $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les polynômes de Lagrange associés $L_1, L_2, \ldots, L_n$ forment une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$; de plus $L_1 + L_2 + \cdots + L_n = 1$.
  - Donné $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)) \in (\mathbb{K}^2)^n$, le polynôme de Lagrange $L = \sum y_i.L_i$ est l'unique polynôme de degré minimal vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L(x_i) = y_i$.

- **Chapitre 6** Révisions et compléments d'algèbre linéaire

A. Matrices et Systèmes linéaires.

- Matrice de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Somme, multiplication par un scalaire, produit matriciel. Propriétés.
- Transposition ; propriétés.
- Matrices carrées d'ordre p. Opérations et propriétés.
- Polynômes de matrices ; propriétés. Polynôme annulateur et applications.
- Trace d'une matrice carrée. Propriétés.
- Matrices carrées remarquables : scalaires, diagonales, triangulaires, symétriques, anti-symétriques.
- Liens matrices/systèmes linéaires. Application à l'inversion de matrices.
- Matrices par blocs. Propriétés.

B. Espaces vectoriels et applications linéaires

- Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels.
- Somme de 2 sous-espaces ; somme directe ; sous-espaces supplémentaires. Somme de p sous-espaces. Sommes directes $F_1 \oplus F_2$ et $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Sous-espaces supplémentaires. Caractérisations.
- Applications linéaires, endomorphismes (etc.) ; généralités et propriétés. Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$.
- Équations linéaires. Structure affine de l'ensemble des solutions.
- Projecteurs et Symétries ; caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = id_E$ et décomposition en somme directe associée.
- Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateur ; propriétés.
- Famille libre, génératrice, de vecteurs ; base ; coordonnées dans une base. Propriétés. Base adaptée à une somme directe.
- Espace vectoriel de dimension finie. Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite. Existence de bases dans un ev de dimension finie. Toutes les bases ont même cardinal. Dimension. Croissance de la dimension.

- Exemple : polynôme d'interpolation de Lagrange ; polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$; ils forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $L_1 + \cdots + L_n = 1$.
- Existence de supplémentaires en dimension finie et caractérisation à l'aide de la dimension.
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'une application linéaire. Propriétés et caractérisations. Théorème du rang.
- Application linéaires en dimension finie : représentation matricielle ; propriétés. Matrice de passage et effet d'un changement de base.
- Trace d'une endomorphisme.

Bref :

Tout le programme de sup sur :

- Matrices et systèmes linéaires.
- Espace vectoriels et applications linéaires.
  En général et en dimension finie.

Auquel on rajoute les compléments de spé :

- Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Matrices blocs.
- Sommes directes de p sous-espaces. espaces supplémentaires.
- Equations linéaires ; structure affine des solutions.
- Polynômes de matrices, polynômes d'endomorphismes.
- Polynômes de Lagrange. Polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit.