Chapitre 9
Séries entières

http://www.jean-philippe-preaux.fr

Table des matières

Nous étudions dans ce chapitre les séries entières, ce sont des séries de fonctions de la variable complexe (ou réelle) dont les sommes partielles sont polynomiales. Il s'avère que la plupart des fonctions usuelles sont sommes de séries entières, au moins localement ; ce qui leur confère le plus haut degré de régularité. L'écriture sous forme de séries entières permet une résolution simple d'équations fonctionnelles, dont la résolution d'équations différentielles.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier, x un réel, et z un complexe.

1. Série entière et rayon de convergence

1.1. Séries entières.

Définition 1. (Série entière)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- *On appelle série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto a_n x^n$.*
- *On appelle série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$.*
- *Une telle série définit une fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ $\Big($resp. complexe $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}\Big)$ en tout point $x\in\mathbb{R}$ $\big($resp. $z\in\mathbb{C}\big)$ en lequel la série converge. On l'appelle la <u>somme</u> de la série entière.*

Remarque. Autrement dit, une série entière est une série de fonctions dont le terme général d'ordre n est (nul ou) monomial de degré n. En particulier toutes les sommes partielles $S_n : x \longmapsto S_n(x)$ ou $S_n : z \longmapsto S_n(z)$ sont polynomiales de degré au plus n.

Exemples.

• Lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$, les séries entières $\sum x^n$, à variable réelle, et $\sum z^n$, à variable complexe, sont pour tout $x\in\mathbb{R}$ (resp. $z\in\mathbb{C}$) fixés des séries géométriques ; elles convergent sur $]-1,1[$ $\big($resp. sur $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}\big)$ vers $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ (resp. $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$). En tout $x \in]-1,1[$ $\Big($resp. $z \in \big\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\big\}\Big)$ la convergence est absolue.

• Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge vers la fonction exp. En tout $z \in \mathbb{C}$ la convergence est absolue.

Dans la suite nous traiterons des séries entières à variables complexes $\sum a_n z^n$; mais tous les résultats restent valides pour les séries entières à variables réelles $\sum a_n x^n$ vues comme restrictions à $\mathbb{R}$ des précédentes.

1.2. Rayon de convergence.

Le lemme fondamental suivant procure une information précieuse sur le domaine de définition d'une fonction définie par une série entière.

Théorème 1. (Lemme d'Abel)
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$

$$|a_n z^n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$$

en particulier, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration. Soit un tel $z_0 \in \mathbb{C}^*$; alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left|a_n z_0^n \times \frac{z^n}{z_0^n}\right| \\ &= \underbrace{|a_n z_0^n|}_{\text{bornée}} \times \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \implies |a_n z^n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right) \end{aligned}$$

Or pour z fixé avec $|z| < |z_0|$, la série géométrique $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente ; par comparaison, la série $\sum a_n z^n$ est alors absolument convergente. ■

Remarque. Ainsi si pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$ fixé, la série $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente (i.e. $\sum |a_n z_0^n|$ converge), alors en particulier $|a_n z_0^n| \longrightarrow 0$ et donc la suite $(|a_n z_0^n|)_n$ est bornée. Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Exemple. Puisque $1^n = 1$ est bornée, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\sum z^n$ converge absolument.

Proposition-Définition 2. (Rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; on appelle rayon de convergence de la série entière,

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid a_n r^n \text{ soit bornée } \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Démonstration. La borne sup est bien définie (éventuellement $R = +\infty$ lorsque $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid a_n r^n \text{ soit bornée }\}$ n'est pas majorée), puisque $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid a_n r^n \text{ soit bornée }\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car il contient $r = 0$. ■

Le résultat fondamental est alors le suivant :

Théorème 2.
Si R est le rayon de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ alors :

- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, il y a convergence absolue de la série $\sum a_n z^n$.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, il y a divergence grossière de la série $\sum a_n z^n$.*

Démonstration. Le premier point découle du lemme d'Abel : si $|z| < R$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ avec $|z| < r < R$ tel que $a_n r^n$ soit borné et donc $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Pour le second point si $|z| > R$ par définition du rayon de convergence $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée donc $(a_n z^n)$ non plus donc $(a_n z^n)$ ne peut pas tendre vers 0 c'est à dire que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. ■

Remarque. Rappelons que $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_n$ est bornée.

Ainsi on est amené à définir :

Définition 3. (Disque/intervalle ouvert de convergence)
• *Si R est le rayon de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ alors on appelle disque ouvert de convergence :*

$$D(0,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\right\}$$

Bien sûr lorsque $R = +\infty$, $D(0,R) = \mathbb{C}$.
• *Si R est le rayon de convergence d'une série $\sum a_n x^n$ alors on appelle intervalle ouvert de convergence :*

$$D(0,R) =]-R,R[$$

Bien sûr lorsque $R = +\infty$, $D(0,R) = \mathbb{R}$.

Remarque. Notons aussi :

Soit R le rayon de convergence d'une série à variable complexe (resp. réelle), notons :

$$\overline{D(0,R)} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\right\} \quad \textit{resp.} \quad \overline{D(0,R)} = [-R,R]$$

le disque fermé de rayon R.

Alors le domaine de définition D de la $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+$ vérifie :

$$D(0,R) \subset D \subset \overline{D(0,R)}$$

La frontière du disque ouvert de convergence $\overline{D(0,R)} \setminus D(0,R)$ s'appelle le cercle d'incertitude. Le seul rayon de convergence ne permet rien de déduire quant à la nature de $\sum a_n z^n$ pour z dans le cercle d'incertitude.

Exemples.

• Pour $\sum z^n$ le rayon de convergence est $R = 1$; il a a convergence (absolue) dans le disque ouvert de convergence, mais divergence partout ailleurs (série géométrique) et même grossière partout ailleurs (puisque si $|z| \geqslant 1$, $|z|^n$ ne tend pas vers 0).

• Pour $\sum \dfrac{x^n}{n}$: pour $x = 1$ il y a divergence tandis que pour $|x| < 1$:

$$\frac{x^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

par croissance comparée. Ainsi le rayon de convergence est 1 : il y a convergence absolue sur le disque ouvert de converge $]-1,1[$, divergence grossière à l'extérieur du disque fermé de convergence (c'est à dire sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$), et quant au cercle d'incertitude $\{-1,1\}$:

– Il y a divergence en $x = 1$ (mais non grossière) par divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

– Il y a convergence en $x = -1$ (mais non absolue) d'après le critère spécial des séries alternées appliqué à la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 3. (Convergence normale sur tout segment fermé)
Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, alors il y a convergence normale (et donc uniforme) de la série entière sur tout segment fermé $[a,b] \subset]-R,R[$.

Démonstration. En effet pour tout $x \in [a,b]$, en posant $r = \max(|a|,|b|)$ on a :

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n \quad \text{et} \quad \sum |a_n| r^n \text{ converge.}$$

■

Remarque. Mais attention, il n'y a en général ni convergence normale ni uniforme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Contre-exemple : $\sum x^n$ ne converge ni normalement ni uniformément sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. En effet, sinon, d'après le théorème d'interversion des limites (cf. Chapitre : Suites et séries de fonctions), puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \underset{x\to1}{\longrightarrow} 1$, on aurait alors que $\sum \lim\limits_{x\to1} x^n = \sum 1$

converge, ce qui n'est pas le cas.

Corollaire 4. (Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence)
La fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur son intervalle ouvert de convergence.*

Démonstration. Pour une série entière à variable réelle c'est une conséquence de la convergence normale sur tout intervalle fermé $[-r, r] \subset]-R, R[$: en effet les sommes partielles sont toutes continues, car polynomiales, et la convergence normale sur tout segment $[-r, r]$ implique la convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]-R, R[$; d'où la continuité de la somme (cf. Chapitre : Suites et séries de fonctions). ■

Le résultat demeure vrai pour les séries entières de la variable complexe.

Théorème 5. (Continuité sur le disque ouvert de convergence)
La fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur son disque ouvert de convergence.*

Démonstration. Admis.
Il s'avère que les notions de convergence uniforme/normale ont un sens (similaire) pour les séries de fonctions de la variable complexe. Il y a alors, par le même argument, pour une série entière de la variable complexe convergence normale sur tout disque fermé dans le disque de convergence, et de même la continuité en découle. ■

1.3. Calcul du rayon de convergence.

Pour calculer le rayon de convergence on procède souvent par double inégalité :

Proposition 6. (Minoration/Majoration du rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
• *Si l'une des condition suivantes est vérifiée :*
– *la suite* $(a_n z^n)_n$ *est bornée,*
– *la suite* $(a_n z^n)_n$ *est convergente,*
– *la série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge,*
– *la série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge absolument,*
alors $R \geqslant |z|$.
• *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
– *la série numérique* $\sum |a_n z^n|$ *diverge,*
– *la série numérique* $\sum a_n z^n$ *diverge,*
– *la suite* $(a_n z^n)_n$ *ne tend pas vers 0,*
– *la suite* $(a_n z_n)_n$ *n'est pas bornée,*
alors $R \leqslant |z|$.

Démonstration. Par définition du rayon de convergence, si la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée alors $R \geqslant |z|$. De plus $\sum a_n z^n$ CVA $\Longrightarrow \sum a_n z^n$ CV $\Longrightarrow (a_n z^n)_n$ CV $\Longrightarrow (a_n z^n)_n$ est bornée.
Par contraposée du lemme d'Abel si la série numérique $\sum |a_n z^n|$ diverge alors $R \leqslant |z|$. De plus $(a_n z^n)_n$ non bornée $\Longrightarrow (a_n z^n)_n$ ne tend pas vers 0 $\Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge $\Longrightarrow \sum |a_n z^n|$ diverge. ■

Exemples.

• La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$, elle converge.

• La série $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet, pour $z = 1$ la série diverge, donc $R \leqslant 1$. Pour tout $0 < r < 1$, nr^n converge par croissance comparée, donc $R \geqslant r$ pour tout $r < 1$, et donc $R \geqslant 1$.

• Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors $\sum a_n z^{2n}$ a pour rayon de convergence $R_1 = \sqrt{R}$ (en notant $\sqrt{+\infty} = +\infty$). En effet :
– Si $|z| < \sqrt{R}$ alors $|z^2| < R$ et $\sum a_n \left(z^2\right)^n$ converge ; donc $R_1 \geqslant \sqrt{R}$.
– Si $|z| > \sqrt{R}$ alors $|z^2| > R$ et $\sum a_n \left(z^2\right)^n$ diverge ; donc $R_1 \leqslant \sqrt{R}$.

Exercice 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right) z^n$.

Résolution.

Le plus direct pour le calcul du rayon de convergence, lorsque c'est possible, utilise le critère de d'Alembert.

Théorème 7. (Application de la règle de d'Alembert)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; si tous les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang, et si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

alors le rayon de convergence R de la série est donné par :

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0, \\ \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^*, \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration. Appliquons sous ces hypothèses la règle de d'Alembert à la série $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell = 0 & (1) \\ |z| \times \ell & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^* & (2) \\ +\infty & \text{si } \ell = +\infty & (3) \end{cases}$$

D'après d'Alembert :

– dans le cas (1) la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$; ainsi $R = +\infty$,

– dans le cas (2) la série $\sum a_n z^n$ converge absolument dès que $|z| \times \ell < 1$, c'est à dire dès que $|z| < \frac{1}{\ell}$ donc $R \geqslant \frac{1}{\ell}$ et diverge dès que $|z| \times \ell > 1$, c'est à dire dès que $|z| > \frac{1}{\ell}$ donc $R \leqslant \frac{1}{\ell}$; ainsi $R = \frac{1}{\ell}$,

– dans le cas (3), la série $\sum a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$; ainsi $R = 0$. ∎

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries :

$$\sum \frac{z^n}{n} \quad ; \quad \sum \frac{n^2 z^n}{2^n} \quad ; \quad \sum \frac{(-2)^n z^n}{\sqrt{n}}$$

Résolution.

Théorème 8. (Comparaison de rayons de convergence)
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières, et* R_a, R_b *leur rayon de convergence respectif.*
- *Si* $a_n = O(b_n)$ *ou* $a_n = o(b_n)$ *alors* $R_a \geqslant R_b$.
- *Si* $a_n \sim b_n$ *alors* $R_a = R_b$.

Démonstration. Si $a_n = O(b_n)$ (en particulier si $a_n = o(b_n)$) alors si $b_n z^n$ est borné il en est de même de $a_n z^n$ donc $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et donc $R_a \geqslant R_b$ et $R_a \leqslant R_b$. ■

Exemples.

• Rayon de convergence de $\sum d(n) z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant d(n) \leqslant n$. Or $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \leqslant 1$ et $\sum n z^n$ aussi (voir exemple plus haut), donc $R \geqslant 1$. Finalement le rayon de convergence est $R = 1$.

• Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$.
On a :
$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n} = \frac{(2n)!}{n!n^n} \sim \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n} \times \frac{e^n}{n^{2n}\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{\sqrt{2}\times 4^n}{e^n}$$
En appliquant d'Alembert :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}\times 4^{n+1}e^n}{\sqrt{2}\times 4^n e^{n+1}} = \frac{4}{e}$$
Le rayon de convergence est donc $R = \frac{e}{4}$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence de :
$$\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right) z^n \quad ; \quad \sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n \quad ; \quad \sum \frac{\mathrm{ch}(-n)}{2^n} z^n$$

Résolution.

1.4. **Rayon de convergence et opérations sur les séries entières.**

Proposition 9.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Les séries entières* $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$, *avec* $n_0 \in \mathbb{N}$, *ont même rayon de convergence* R.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ fixés, la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ssi la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée. ■

Proposition 10.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Les séries entières* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^{n+k}$, *avec* $k\in\mathbb{N}$, *ont même rayon de convergence* R *et pour tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|<R$ *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+k} = z^k \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Démonstration. Soient $k\in\mathbb{N}$ et $z\in\mathbb{C}$ fixés ; puisque $a_n z^{n+k} = z^k \times a_n z^n$ la suite $(a_n z^{n+k})_n$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée. Les séries ont donc même rayon de convergence. ■

Définition 4. (Opérations algébriques sur les séries entières)

- *On appelle produit de la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *par le scalaire* $\lambda\in\mathbb{K}$ *la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$.
- *On appelle somme des séries entières* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) z^n$.
- *On appelle produit des séries entières* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ *où*

$$\forall n\in\mathbb{N}, c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Il correspond au produit de Cauchy des séries numériques

Proposition 11. (Opérations algébriques et rayon de convergence)
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_1, R_2, *et soit* $\lambda\in\mathbb{K}$ *un scalaire.*

- *La série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* $R = \begin{cases} R_1 & \text{si } \lambda\neq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda = 0\end{cases}$ *et pour tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|<R_a$ *on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$
- *La série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* $\begin{cases} R=\min(R_1,R_2) & \text{si } R_1 \neq R_2 \\ R \geqslant R_1 = R_2 & \text{si } R_1 = R_2\end{cases}$ *et pour tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|<\min(R_1,R_2)$, *on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$
- *La série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, *produit de ces deux séries entières, a un rayon de convergence* $R\geqslant \min(R_1,R_2)$ *et pour tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|<\min(R_1,R_2)$, *on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Démonstration. Prouvons les dans l'ordre.
• Si $\lambda=0$, alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ est la série nulle de rayon de convergence infini, si $\lambda\neq 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si la suite $(\lambda a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, d'où l'égalité des rayons de convergence. La formule est immédiate.
• On a pour tout $r\in[0,\min(R_1,R_2)[$, la suite $((a_n+b_n)r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée car $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n r^n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées donc $R\geqslant \min(R_1,R_2)$.
Supposons sans perte de généralité que $R_1<R_2$ et montrons qu'alors $R=R_1$. On sait déjà que $R\geqslant R_1$. Soit r tel que $R_1<r<R_2$. La suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée et la suite $(b_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc la suite $((a_n+b_n)r^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée donc $R\leqslant r$. Comme ceci est vrai pour tout $r\in]R_1,R_2[$, $R\leqslant R_1$ et finalement $R=R_1$.
Remarquons pour terminer que si $R_1=R_2$, alors on peut très bien avoir $R>R_1=R_2$, en prenant par exemple deux séries opposées de rayon de convergence fini : leur somme est alors la série nulle de rayon infini.

• Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<\min(R_1,R_2)$. Les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ sont toutes deux absolument convergentes, donc d'après le théorème sur le produit de Cauchy des séries numériques, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \cdot b_{n-k} z^{n-k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

ce qui montre la formule et que $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.
Remarquons qu'on peut très bien avoir $R > \min(R_1, R_2)$, par exemple si l'une des deux séries est la série nulle et que l'autre a un rayon de convergence fini. ■

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) z^n$$

Résolution.

Proposition 12.
Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*

Démonstration. (Argument à retenir !)
Notons R_1 le rayon de convergence de la première série entière $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de la seconde série entière $\sum n a_n z^n$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n\,|a_n| = |b_n|$ donc $R_1 \geqslant R_2$.
Pour tout r tel que $0 \leqslant r < R_1$, il existe r_1 tel que $0 \leqslant r < r_1 < R_1$. Or la suite $(a_n r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'où :

$$n a_n r^n = \left(n\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\right)\underbrace{(a_n r_1^n)}_{\text{bornée}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. En particulier pour tout $0 \leqslant r < R_1$, $(n a_n r^n)_n$ est bornée, et donc $R_2 \geqslant R_1$, donc, finalement, $R_2 = R_1$. ■

Définition 5. (Séries entières dérivées/primitives)
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière.*

- *Sa série entière dérivée (terme à terme) est :*

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$$

- *Une série entière primitive (terme à terme) est :*

$$c + \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

où $c \in \mathbb{K}$.

Corollaire 13.
Une série entière, sa série dérivée, et toutes séries primitives, ont même rayon de convergence.

Démonstration. Découle des propositions 9, 10 et 12 puisque $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^n = z \times \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{a_n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+1} = z \times \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. ■

Remarque. Par une récurrence immédiate il en est de même des séries dérivées successives.

Exercice 5. Déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$ le rayon de convergence de :

$$\sum_{n \geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} z^n$$

Résolution.

2. Série entière d'une variable réelle ; propriété de la somme

Rappelons que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in]-R, R[$ (intervalle ouvert de convergence), la série numérique $\sum a_n x^n$ converge, et la convergence est normale sur tout segment inclus dans $]-R, R[$. Notons $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{K}$ sa somme. La fonction f est continue sur $]-R, R[$. Nous allons approfondir la connaissance des propriétés de f somme d'une série entière à variable réelle.

2.1. Théorème d'intégration terme à terme pour les séries entières.

Théorème 14. (Primitivation terme à terme)
Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{K}$ sa somme. Alors pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x f(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

et les primitives de f sur $]-R, R[$ sont les applications :

$$\mathrm{F}_c : x \mapsto c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

où $c \in \mathbb{K}$ est une constante. Les séries entières ont toutes même rayon de convergence R.

Théorème 15. (Intégration terme à terme sur un segment)
Sous les mêmes hypothèses, on peut intégrer terme à terme sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]-R, R[$:

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_\alpha^\beta t^n \ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \right).$$

Démonstration. Des théorèmes 14 et 15. Ils découlent tous deux immédiatement du théorème d'intégration terme à terme sur un segment d'une limite uniforme (Chapitre suites et séries de fonctions) puisque la série de fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[0, x]$ (resp. sur $[\alpha, \beta] \subset]-R, R[$). ∎

Exemples.

- De :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on en déduit (en l'appliquant en $-x$) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

puis par primitivation (avec $\ln(1) = 0$) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

• Puis de :

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

on obtient par primitivation (avec $\text{Arctan}(0) = 0$) :

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

2.2. **Dérivation terme à terme des séries entières.**

Les sommes de séries entières sont on ne peut plus régulières :

Théorème 16. (Dérivations successives terme à terme)
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{K}$ sa somme. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et on obtient les dérivées successives par dérivation terme à terme : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

et les séries entières obtenues ont toutes même rayon R.

Démonstration. Immédiate avec le théorème précédent de primitivation terme à terme, sachant que le rayon de convergence reste le même. ∎

Exemple. L'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$).
Et puisque (cf. exemple précédent),

$$\forall x \in \ ]-1, 1[\,, \quad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

en particulier :

$$\forall x \in \ ]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

et clairement cette relation demeure aussi vraie en $x = 0$. Ainsi f est somme d'une série entière et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, et par conséquent sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 17.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière à valeurs dans $\mathbb{K}$ de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{K}$ sa somme ; alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque. On en déduit l'application importante : Si deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ coïncident sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors ces deux séries entières sont égales (c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$).

On retiendra que l'on peut intégrer ou dériver librement une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n.$$

Résolution.

3. Développement en série entière

On donne une écriture sous forme de somme de série entière de la plupart des fonctions usuelles. Dans toute cette partie I désigne un intervalle contenant 0 comme point intérieur, c'est à dire tel qu'il existe $r>0$ avec $]-r,r[\subset I$.

3.1. Fonctions développable en série entière.

Puisque la somme d'une série entière est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont les coefficients a_n sont uniquement déterminés par ses dérivées successives via la relation $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, il est naturel pour une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de lui associer la série entière ayant ces mêmes coefficients. C'est sa série de Taylor.

Définition 6. (Série de Taylor d'une fonction)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 comme point intérieur à I, et soit $f\in\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$.

On appelle série de Taylor de f la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

On s'intéresse aux fonctions qui sont somme d'une série entière :

Définition 7. (Fonction développable en série entière)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 comme point intérieur, et soit $f: I\to\mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière si il existe un intervalle $]-r,r[\subset I$, avec $r>0$, et une série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$ *à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de rayon de convergence $R\geqslant r>0$ telle que :*

$$\forall x\in\,]-r,r[\,,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$ *est alors appelée le développement en série entière de f.*

Bien sûr si un développement en série entière existe, ce ne peut être que la série de Taylor.

Théorème 18. (Unicité du dévelopement en série entière)
Sous les hypothèses de la définition, si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors :

- *f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$,*
- *son développement en série entière est unique : il s'agit de sa série de Taylor ; pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration. Découle immédiatement du théorème 16 et de son corollaire 17. ■

Remarques.

• Ainsi, si la fonction est paire (resp. impaire), tous les a_{2n+1} (resp. a_{2n}) sont nuls.

• Ses primitives sur $]-r,r[$ sont développables en série entière sur $]-r,r[$. Ses dérivées successives sur $]-r,r[$ sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

• Une fonction peut être de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I sans être développable en série entière, soit parce que sa série de Taylor a un rayon de convergence nul, soit parce qu'elle converge vers une autre fonction que f. Par exemple, on montre que l'application :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses dérivées successives sont nulles en 0. Donc sa série de Taylor converge vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$: f n'est pas développable en série entière.

• Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière on peut parfois montrer que la série de Taylor de f converge (simplement) vers f en utilisant une formule de Taylor qui donne le reste, ou au moins une majoration :

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a,a[$ avec $a>0$, alors (formules de Taylor) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in\ ]-a,a[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$\text{avec } R_n(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right) \text{ i.e. } \lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

- *D'après la formule de Taylor avec reste intégral :*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

- *D'après la formule de Taylor-Lagrange $\forall r \in]0,a[$:*

$$|R_n(x)| \leqslant \max_{t\in[-r,r]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Et f sera développable en série entière si et seulement si il existe $0 < r \leqslant a$ tel que :

$$\forall x \in]-r,r[,\ R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi pour qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a,a[$ soit développable en série entière :

– Il faut et il suffit que :

$$\exists r \in]0,a],\ \forall x \in]-r,r[, \quad \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

– Il suffit que :

$$\exists r \in]0,a[,\ \forall x \in]-r,r[, \quad \max_{t\in[-r,r]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3.2. **Développements en série entière usuels.**

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad R=1$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad R=1$$

Plus généralement :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z|<1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad R=1$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z|<1 \implies \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \qquad R=1$$

Démonstration. Déjà établie en exemple : somme d'un série géométrique de raison $\pm x$ avec $-1 < x < 1$ (ou $\pm z$ avec $|z| < 1$). ■

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad R=1$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad R=1$$

Démonstration. Découle du résultat précédent par primitivation (théorème 14). ■

Exercice 7. Montrer que :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Résolution.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \qquad R=1$$

Démonstration. Déjà traité en exemple en primitivant le développement en série entière de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$, lui même obtenu en appliquant en x^2 le développement en série entière de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$. ■

Exercice 8. Montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Résolution.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad R = +\infty$$

Démonstration. Déjà traité dans le chapitre sur les séries numériques. Pour rappel : on traite le cas particulier où $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange ; pour x fixé :

$$\max_{t\in[-|x|,|x|]} \left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = \exp(|x|) \implies \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \exp(|x|) \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée}$$

avant de l'étendre à tout complexe z par convergence absolue.

Rappelons au passage que $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ et que $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$ pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. ■

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad R = +\infty$$

Démonstration. Déjà traité dans le chapitre sur les séries numériques à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Pour rappel : pour x fixé :

$$\max_{t\in[-|x|,|x|]} \left|\sin^{(2n+2)}(t)\right| \leqslant 1 \implies \left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant 1 \times \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée}$$

$$\max_{t\in[-|x|,|x|]} \left|\cos^{(2n+1)}(t)\right| \leqslant 1 \implies \left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant 1 \times \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée}$$

■

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R = +\infty$$

Démonstration. On effectue une combinaison linéaire des développements en série entière de e^x et e^{-x} :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \\
\Longrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\
\text{et } &\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

■

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{rcl}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^\alpha \end{array}$$

est développable en série entière de développement :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

et a pour rayon de convergence :

$$R = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha \in \mathbb{N} \\ 1 & si\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \end{cases}.$$

Remarque. Dans le cas $\alpha \in \mathbb{N}$, il s'agit en fait de la formule du binôme appliquée au développement du polynôme $(1+x)^\alpha$; aussi cette formule s'appelle la formule du binôme généralisée.

Démonstration. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ cela découle de la formule du binôme ; puisqu'elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Supposons désormais que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Soit la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ où $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$, et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

L'application de la règle de d'Alembert montre donc que cette série a un rayon de convergence égal à 1. Notons f sa somme sur $]-1,1[$; $\forall x \in]-1,1[, f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$. D'après le théorème 16, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n.$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
(x+1)f'(x) &= xf'(x) + f'(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right] x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \times \left[1 + \frac{\alpha-n}{n}\right] x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \times \frac{\alpha}{n} x^n \\
&= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \alpha f(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre
$$y' = \frac{\alpha}{x+1}y.$$
Comme de plus $f(0)=1$, f est donc solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y' = \dfrac{\alpha}{x+1}y \end{cases}$$
Or on sait que la solution d'un tel système est unique, et on vérifie immédiatement que l'application définie sur $]-1,1[$ par $\forall x \in]-1,1[$, $g(x)=(x+1)^\alpha$ est solution de ce système, d'où $f=g$, ce qui achève la preuve. ■

Formulaire récapitulatif sur $\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$	$x \in]-1,1]$
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$x \in]-1,1[$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in]-1,1[$

Formulaire récapitulatif sur $\mathbb{C}$	
$\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$z \in \mathbb{C}$ avec $\lvert z\rvert < 1$, $R=1$
$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$	$z \in \mathbb{C}$, $R=+\infty$

Exercice 9. Développer en série entière la fonction définie pour tout $x \in]-\infty, 1[$ par :
$$x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$
(Indication : utiliser le produit de Cauchy des séries entières.)

Résolution.

Méthode. Comment montrer qu'une fonction est développable en série entière ?

- si c'est une expression, par opérations à l'aide des séries entières usuelles - somme, produit de Cauchy, dérivation, primitivation, décalage d'indice, substitution de x par x^2 *etc.*
- À l'aide d'un développement limité en majorant le reste par une suite (α_n) qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$; pour cela on utilise si on le peut l'inégalité de Taylor-Lagrange, sinon Taylor à reste intégral.
- À l'aide d'une équation différentielle simple. Savoir utiliser dans ce cas l'existence et l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Pour une intégrale à paramètre : on utilise un théorème d'intégration terme à terme pour faire apparaître une série entière.

Remarque.

- le fait qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas du tout suffisant pour qu'une fonction soit développable en série entière.
- la composition $f \circ g$ avec $g(0) = 0$ et f et g DSE est bien DSE mais c'est un résultat hors-programme qui nécessite de savoir manipuler des sommes doubles infinies (ce que l'on fait parfois en probabilités...)