

# Chapitre 8

## Suites et séries de fonctions

<https://www.jean-philippe-preaux.fr>

### TABLE DES MATIÈRES

1. Suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$	1
1.1. Convergence simple et uniforme : généralités	1
1.2. Continuité de la limite uniforme	6
1.3. Intégration sur un segment de la limite uniforme	8
1.4. Dérivabilité de la limite	8
2. Séries de fonctions	11
2.1. Convergences simple, uniforme, normale	11
2.2. Continuité de la somme	16
2.3. Théorème d'interversion Limite-Somme	17
2.4. Intégration terme à terme sur un segment	18
2.5. Dérivation terme à terme	19

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

### 1. SUITES DE FONCTIONS $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère des fonctions  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  et on définit deux concepts de convergence de la suite de fonction  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

#### 1.1. Convergence simple et uniforme : généralités.

##### **DÉFINITION 1. (Convergence simple)**

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions telles que pour tout  $x \in I$ , la suite numérique  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite que l'on note  $f(x) \in \mathbb{K}$ .

La fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  ainsi définie est appelée limite simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  et on dit que la suite  $(f_n)_n$  converge simplement vers la fonction  $f$ .

Plus formellement, on note  $f_n \rightarrow f$  ou  $f_n \xrightarrow{s} f$  lorsque :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

##### **Remarques.**

- On notera que l'entier  $N$  dépend à la fois de  $\varepsilon$  et de  $x$ .
- Toutes les fonctions  $f_n$  et leur limite éventuelle  $f$  sont définies sur un même intervalle  $I$  et à valeurs dans un même ensemble  $\mathbb{K}$ . On devrait parler plutôt d'une suite d'applications.

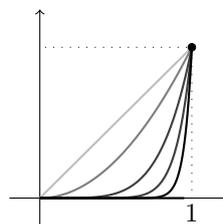
##### **Exemples.**

- La suite de fonctions  $(f_n)_n$  où

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

converge simplement vers :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

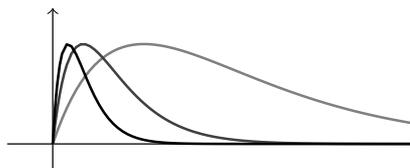


- La suite de fonctions  $(g_n)_n$  où

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto nxe^{-nx} \end{aligned}$$

converge simplement vers la fonction  $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  identiquement nulle ; en effet,

$$\forall x \geq 0, g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



**Exercice 1.** Soient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Montrer que si  $f_n \xrightarrow{s} f$  alors :

- Si toutes les fonctions  $f_n$  sont croissantes alors  $f$  est croissante.
- Si toutes les fonctions  $f_n$  sont convexes alors  $f$  est convexe.

(Indication : on procédera par passage à la limite dans une inégalité.)

Puis répondre aux deux questions suivantes :

- Si tous  $f_n$  sont strictement croissantes, a-t-on nécessairement  $f$  strictement croissante ?
- Si tous les  $f_n$  sont continues sur  $I$ , a-t-on nécessairement  $f$  continue sur  $I$  ?

**Résolution.**

Le défaut de ce concept de convergence est qu'il est trop faible pour imposer à la fonction limite  $f$  de conserver la régularité des fonctions  $f_n$ . Par exemple, dans le premier exemple ci-dessus, toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  tandis que leur limite simple  $f$  ne l'est pas.

Une limite simple de fonctions continues n'est PAS en général continue

Pour cette raison, on définit un concept plus fort de convergence d'une suite de fonctions. C'est la convergence uniforme. Nous verrons que pour ce type de convergence beaucoup plus de propriétés des  $f_n$  sont conservées par la limite  $f$ . Dans ce type de convergence, l'entier  $N$  dans la définition ne dépend plus de  $x$ .

**DÉFINITION 2. (Convergence uniforme)**

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions, s'il existe  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tel que :

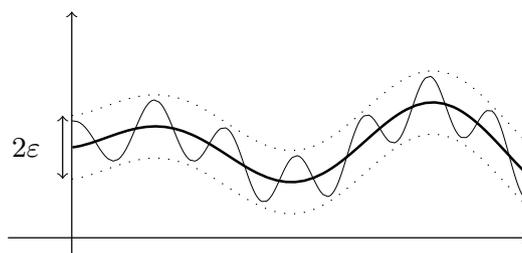
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

on dira que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction  $f$  appelée limite uniforme. On pourra noter :  $f_n \xrightarrow{u} f$

**Remarques.**

– Dans la définition,  $N$  ne dépend plus que de  $\varepsilon$ .

– Cela implique en particulier, qu'à partir d'un certain rang, les fonctions de la suite  $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$  soient bornées.



On peut reformuler la définition de la manière suivante :

**PROPOSITION 1. (Convergence uniforme)**

La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction  $f$  si et seulement si les fonctions de la suite  $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration.** Que les fonctions  $f_n - f$  soient bornées sur  $I$  à partir d'un certain rang permet de définir  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  pour  $n \gg 0$ ; c'est le cas notamment lorsque  $f_n \xrightarrow{u} f$ ; dans ce cas :

$$(\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \iff \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ & \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \iff \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Il devient alors naturel de définir l'objet suivant appelée norme de la convergence uniforme pour les fonctions bornées (cf. cours sur les espaces vectoriels normés). ■

**DÉFINITION 3. (Norme de la convergence uniforme)**

Soit  $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions bornées de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  : c'est un  $\mathbb{K}$ -sous espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ . On définit la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur cette espace par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

La proposition précédente se re-écrit alors :

**PROPOSITION 2.**

Une suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  si et seulement si la suite de fonctions  $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée à partir d'un certain rang et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

La convergence uniforme implique la convergence simple.

**THÉORÈME 3. (CVU  $\implies$  CVS)**

Si une suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$  alors elle converge simplement vers  $f$ .

$$f_n \xrightarrow{u} f \implies f_n \xrightarrow{s} f$$

**Démonstration.** La preuve est quasi-immédiate : supposons la convergence uniforme. Soit  $x_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$  : par cvu,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall x \in I, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . En particulier pour  $x_0$ . D'où l'existence de  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N \implies |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ . ■

La convergence uniforme est plus forte que la convergence simple mais elle permet d'avoir plus d'informations sur la régularité de la fonction limite (par exemple la continuité) comme nous le verrons par la suite.

**Méthode.**

Pour étudier la convergence uniforme d'une suite  $(f_n)$ , on commence par chercher la convergence simple, ce qui nous donne la fonction limite  $f$  puis on cherche une suite réelle  $(\alpha_n)$  telle que :

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

Le point important étant que  $\alpha_n$  ne dépend pas de  $t$ . Il est souvent inutile de calculer précisément la borne supérieure, un simple majorant suffit.

Lorsque que l'on a convergence simple et pas convergence uniforme, on peut essayer de voir si on n'a pas une convergence uniforme plus locale, d'où la définition suivante :

**DÉFINITION 4. (Convergence uniforme sur tout segment de  $I$ )**

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions ; s'il existe  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tel que pour tout segment  $K = [a, b] \subset I$ , la suite  $(f_n|_K)$  converge uniformément sur  $K$  vers  $f|_K$ , on dira que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $f$ . On pourra écrire :

$$f_n \xrightarrow[loc.]{} f$$

La convergence uniforme sur tout segment de  $I$  est plus faible que la convergence uniforme sur  $I$  et plus forte que la convergence simple :

**THÉORÈME 4.**

$$f_n \xrightarrow{u} f \implies f_n \xrightarrow[loc.]{} f \implies f_n \xrightarrow{s} f$$

**Démonstration.** Quasi-immédiate.

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ; si  $f_n \xrightarrow{u} f$  alors  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc pour tout  $[a, b] \subset I$ ,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ainsi  $f_n \xrightarrow[loc.]{} f$ .

Si  $f_n \xrightarrow[loc.]{} f$  alors pour  $x_0 \in I$  quelconque, puisque  $[x_0, x_0]$  est un segment,  $f_n(x_0)$  converge vers  $f(x_0)$ , et puisque c'est vrai pour tout  $x_0 \in I$ ,  $f_n \xrightarrow{s} f$ . ■

**Exemples.**

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  :

$$f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n$$

converge simplement vers la fonction  $f$  identiquement nulle sur  $] - 1, 1[$  ; la convergence n'est pas uniforme sur  $] - 1, 1[$  puisque :

$$\sup_{]-1, 1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{]-1, 1[} |x^n| = 1$$

en revanche elle est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset ] - 1, 1[$ , puisque :

$$\sup_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[a, b]} |x^n| \leq \max(|a^n|, |b^n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Une telle situation se rencontre très souvent dans la pratique.

- Par contre, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  :

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

converge simplement vers la fonction  $f$  identiquement nulle sur  $[0, 1[$  mais ne converge ni uniformément, ni uniformément sur tout segment de  $[0, 1]$ .

- Étude de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  où :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

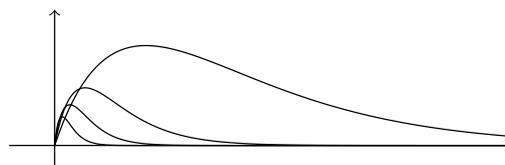
$$x \longmapsto x\sqrt{n}e^{-nx}$$

– Convergence simple : la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$  (par croissance comparée lorsque  $x > 0$ .)

– Convergence uniforme : on calcule  $f'_n(x) = (1 - nx)\sqrt{n}e^{-nx}$ , d'où on déduit le tableau de variation :

$x$	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f_n$	0	$\frac{1}{e\sqrt{n}}$	0

qui montre que  $f_n$  atteint son maximum en  $x = \frac{1}{n}$ , pour un maximum égal à  $\frac{1}{e\sqrt{n}}$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{e\sqrt{n}}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e\sqrt{n}} = 0$ , on en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .



- Étude de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  où

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto nxe^{-nx}$$

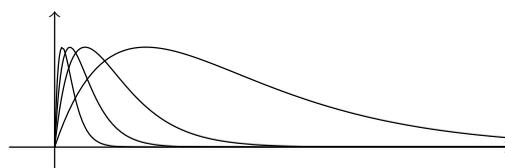
– Convergence simple : la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge simplement vers la fonction  $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  identiquement nulle ; en effet,  $\forall x \geq 0$ ,  $nxe^{-nx} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , par croissance comparée.

– Convergence uniforme : on calcule  $f'_n(x) = (1 - nx)ne^{-nx}$ , d'où on déduit le tableau de variation :

$x$	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f_n$	0	$\frac{1}{e}$	0

qui montre que  $f_n$  atteint son maximum en  $x = \frac{1}{n}$ , pour un maximum égal à  $\frac{1}{e}$ .

Ainsi  $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e}$  ; il n'y a pas convergence uniforme.



Il n'y a pas non plus convergence uniforme sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+$  ; par exemple il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0, 1]$  pour la même raison que sur  $\mathbb{R}_+$ . Mais le problème est concentré en 0 : sur  $\mathbb{R}_+^*$  on n'aurait toujours pas convergence uniforme, mais on aurait par contre convergence

uniforme sur tout segment ; en effet si  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ , pour  $n$  suffisamment grand  $0 < \frac{1}{n} \leq a$  et donc  $\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - f(a)| = nae^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 2.** Étudier la convergence simple et uniforme de :

a)  $f_n(x) = x^n(1-x)$  sur  $[0, 1]$ .

b)  $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Résolution.**

## 1.2. Continuité de la limite uniforme.

C'est ce qui motive la notion de convergence uniforme : une limite uniforme de fonctions continues sur  $I$  est continue sur  $I$  ; tandis que comme on l'a déjà remarqué ce n'est pas vrai pour une limite simple de fonctions continues.

**THÉORÈME 5. (Continuité de la limite uniforme)**

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tels que  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

- Soit  $a \in I$  ; si les  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Remarque.** On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = f(a).$$

**Démonstration.** Soit  $\varepsilon > 0$ , il s'agit de montrer l'existence de  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(*) \quad |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Soit  $\varepsilon' = \varepsilon/3 > 0$ . Par définition de la convergence uniforme il existe un entier  $N$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon'.$$

Pour cet entier  $N$ , par continuité de  $f_N$  en  $a$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f_N(x) - f_N(a)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, d'après (\*), il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq 3\varepsilon' = \varepsilon.$$

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ . La fonction  $f$  est donc continue en  $a$ .

Puisque c'est vrai en tout point  $a \in I$  où les  $f_n$  sont continues, la deuxième assertion découle directement de la première. ■

La continuité étant une notion locale, le résultat reste vrai lorsque la convergence uniforme n'a lieu que sur tout segment inclus dans  $I$ . C'est ce qui motive l'introduction de cette notion intermédiaire de convergence.

**COROLLAIRE 6. (Continuité de la limite uniforme sur tout segment de  $I$ )**

Soient  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tels que  $f_n \xrightarrow[loc]{u} f$ .

- Soit  $a \in I$  ; si les  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration.** Soit  $a \in I$  ; si  $a$  n'est pas une borne de  $I$  (resp. si  $a$  est une borne de  $I$ ), il existe un segment  $K \subset I$  et contenant  $a$  dans son intérieur (resp. dont  $a$  est une borne). Puisque sur  $K$ ,  $f_n \xrightarrow[loc]{u} f$ , le théorème précédent s'applique, et  $f$  est donc continue en  $a$ , ce qui prouve la première assertion. Puisque c'est vrai pour tout  $a \in I$ , la deuxième assertion en découle. ■

**Exemple.** Soient pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{Arctan}(nx) \end{aligned}$$

Étudions la convergence simple et uniforme de  $(f_n)_{n \geq 1}$  :

– Convergence simple : Si  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 0$ .

Si  $x \neq 0$ , on tire de :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

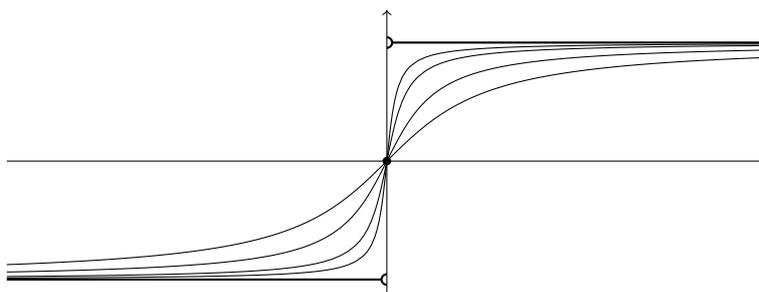
– Si  $x > 0$  :  $\text{Arctan}(nx) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{nx}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$

– Si  $x < 0$  :  $\text{Arctan}(nx) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{nx}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$

Ainsi  $f_n \xrightarrow{s} f$  où :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque les  $f_n$  sont continues tandis que  $f$  ne l'est pas la convergence n'est pas uniforme.



### 1.3. Intégration sur un segment de la limite uniforme.

#### THÉORÈME 7. (Intégration sur un segment d'une limite uniforme)

Soit  $I = [a, b]$  et  $f_n \xrightarrow{u} f$  sur  $I$ . Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Démonstration.** Par limite uniforme,  $f$  sera aussi continue sur  $I$ , donc les intégrales sont alors toutes bien définies sur le segment  $[a, b]$ , et

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

#### Remarques.

- L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle ; la convergence simple ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$  sur  $[0, 1]$  ; la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur  $[0, 1]$  (par croissance comparée lorsque  $x \in ]0, 1[$ ) et :

$$\int_0^1 n^3 x^n (1-x) dx = \int_0^1 n^3 x^n dx - \int_0^1 n^3 x^{n+1} dx = \frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n+2} = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

tandis que bien sûr  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . On peut donc en déduire que la convergence n'est pas uniforme.

Lorsque  $f_n \xrightarrow{s} f$  on n'a PAS en général le droit d'invertir limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

- C'est un théorème d'interversion limite - intégrale. Nous verrons dans le chapitre "Intégrales à paramètres" un théorème (admis) plus puissant d'interversion limite - intégrale sans hypothèse de convergence uniforme (mais avec convergence simple et une hypothèse de domination) : le théorème de convergence dominée.

- Attention la continuité par morceaux des  $f_n$  ne suffit pas car elle n'implique pas en général celle de leur limite uniforme  $f$ , comme le montre l'exemple suivant :

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } \frac{1}{x} \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ f(x) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En effet :  $\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , d'où la convergence uniforme.

Les  $f_n$  sont continues par morceaux puisqu'elles n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité ( $f_n$  en aura  $n$  aux points  $x = 1, 1/2, \dots, 1/n$ ) en lesquels les limites à droite et gauche sont nulles, tandis que  $f$  n'est pas continue par morceaux puisqu'elle présente une infinité de points de discontinuité (aux points  $x = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

### 1.4. Dérivabilité de la limite.

La dérivabilité n'est pas une propriété conservée par convergence uniforme (et donc d'autant moins par convergence simple), comme le montre l'exemple qui suit.

**Exemple.** Soit la suite de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

La suite de fonctions  $f_n$  converge vers la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$  qui n'est pas dérivable en 0. Montrons que la convergence est uniforme :

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n} \left( \sqrt{(nx)^2 + 1} - \sqrt{(nx)^2} \right)$$

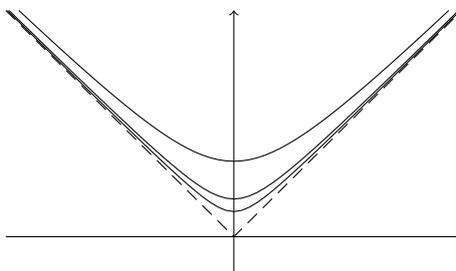
Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2}} \leq 1 \quad \text{car} \quad \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2} \geq 1$$

En particulier si l'on remplace  $x$  par  $nx$ , on obtient :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \left( \sqrt{(nx)^2 + 1} - \sqrt{(nx)^2} \right) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où la convergence uniforme.



Une limite simple de fonctions dérivables n'est PAS en général dérivable.  
Une limite uniforme de fonctions dérivables n'est PAS en général dérivable.

Par contre la dérivabilité d'une limite de fonctions  $f_n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , sera assurée dès lors que l'on a convergence simple de  $f_n$  et convergence uniforme des fonctions dérivées  $f'_n$ .

**THÉORÈME 8. (de dérivabilité  $\mathcal{C}^1$  d'une limite)**

Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On suppose que :

- $f_n$  converge simplement vers  $f$ .
- $f'_n$  converge vers une fonction  $g$  uniformément sur tout segment de  $I$ .

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f' = g$ .

De plus, la convergence de  $f_n$  vers  $f$  est uniforme sur tout segment de  $I$ .

**Démonstration.** Soit  $x_0 \in I$ ; on a pour tout  $x \in I$  :

$$(*) \quad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Puisque  $f'_n$  converge uniformément vers  $g$  sur le segment  $[x_0, x]$  lorsque  $x_0 \leq x$  (resp.  $[x, x_0]$  lorsque  $x \leq x_0$ ),  $g$  est continue sur ce segment, et d'après le théorème d'intégration sur un segment d'une limite uniforme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

donc, par passage à la limite dans l'égalité (\*) :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur ce segment et de dérivée  $g$ . Puisque c'est vrai pour tout  $x_0, x \in I$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et de dérivée  $g$ .

Montrons que la convergence de  $f_n$  vers  $f$  est uniforme sur tout segment de  $I$ . Soit  $[a, b] \subset I$  et  $x_0 \in [a, b]$ ; d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) - f(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) - g(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) - g(t) dt \right| \end{aligned} \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

$$\begin{aligned}
& \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt && \text{d'après l'inégalité triangulaire } \int \\
& \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + |x - x_0| \times \sup_{[x_0, x]} |f'_n(t) - g(t)| \\
\implies \sup_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| & \leq \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + |b - a| \times \underbrace{\sup_{[a, b]} |f'_n(t) - g(t)|}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

■

Bien sur on obtient immédiatement en remplaçant la convergence uniforme sur tout segment de  $I$  de  $f'_n$  par la convergence uniforme sur  $I$  :

**COROLLAIRE 9.**

Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On suppose que :

- $f_n$  converge simplement vers  $f$ .
- $f'_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $g$ .

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f' = g$  et  $f_n$  converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$ .

Généralisons aux ordres supérieurs :

**THÉORÈME 10. (De dérivabilité  $\mathcal{C}^p$ )**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ . On suppose que :

- pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $f_n^{(k)}$  converge simplement,
- $f_n^{(p)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

alors la limite simple  $f$  de  $(f_n)_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{s} f^{(k)}$$

**Démonstration.** Par récurrence sur  $p$ .

(I) Pour  $p = 1$  il s'agit de la première conclusion du théorème 8.

(H) Supposons l'assertion vraie pour un  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé et considérons une suite de fonctions  $f_n$  de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$  sur  $I$  telles que :

- pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $f_n^{(k)}$  converge simplement,
- $f_n^{(p+1)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

En appliquant le théorème 8 à la suite  $(f_n^{(p)})_n$ , la suite  $(f_n^{(p)})_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $h$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$f_n^{(p+1)} \xrightarrow{s} h'$$

Puisque la suite  $(f_n^{(p)})_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  l'hypothèse de récurrence s'applique pour montrer que la limite simple  $f$  de  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et que pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $f_n^{(k)} \xrightarrow{s} f^{(k)}$ . En particulier  $f^{(p)} = h$ ; ainsi  $f^{(p)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ , et  $f_n^{(p+1)} \xrightarrow{s} h' = f^{(p+1)}$ . L'assertion reste donc vraie au rang  $p+1$ . ■

**Méthode.** Pour montrer que la limite est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Si pour tout entier  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , et si :

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , alors :
- la limite  $f$  de  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{s} f^{(k)}.$$

## 2. SÉRIES DE FONCTIONS

Dans cette partie on s'intéresse à différents types de convergence d'une série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .

Donnée une suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq n_0}$ , où  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  pour tout  $n \geq n_0$ , on définit pour tout entier  $n \geq n_0$  la fonction somme partielle :

$$\begin{aligned} S_n : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \sum_{k=n_0}^n u_k(x) \end{aligned}$$

ce qui définit la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq n_0}$ .

Les séries de fonctions étant des suites de fonctions particulières, tout ce qui précède s'applique. Mais dans le cas des séries on définit en outre un mode de convergence plus fort que la convergence uniforme et beaucoup plus pratique à utiliser : la convergence normale.

## 2.1. Convergences simple, uniforme, normale.

## 2.1.1. Convergences simple et uniforme.

**DÉFINITION 5. (Convergence simple, uniforme, d'une série de fonctions)**

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq n_0}$  définie par :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=n_0}^n u_k(x)$$

• La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $S : I \rightarrow \mathbb{K}$  lorsque la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq n_0}$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ .

Dans ce cas, on note la fonction somme  $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  et on définit le reste d'ordre  $n$ ,

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k : I \rightarrow \mathbb{K}$$

• La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur  $I$  vers  $S : I \rightarrow \mathbb{K}$  si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément vers  $S$  sur  $I$ .

• La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $S : I \rightarrow \mathbb{K}$  si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément vers  $S$  sur tout segment de  $I$ .

**Remarques.**

- La plupart du temps  $u_n(x)$  est donnée par une expression fonction de  $n$  et de  $x$ . C'est un abus de notation usuel, il faudrait en toute rigueur se donner pour tout  $n$  la fonction  $x \mapsto u_n(x)$ .
- Bien sur la convergence uniforme sur  $I$  entraîne la convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , qui entraîne la convergence simple sur  $I$ .
- Lorsque la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement, nécessairement la suite de fonction  $u_n$  converge simplement vers la fonction identiquement nulle. En effet, pour tout  $x_0 \in I$ , la série numérique  $\sum u_n(x_0)$  converge et donc  $u_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

C'est une condition nécessaire non suffisante comme le montre l'exemple de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n}$  sur  $\mathbb{R}$ .

• Lorsque la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément, nécessairement la suite de fonction  $u_n$  converge uniformément vers la fonction identiquement nulle.

En effet, si  $f_n \xrightarrow{u} f$  et  $g_n \xrightarrow{u} g$  sur  $I$ , il est facile de vérifier (cf. TD) que toute combinaison linéaire  $\lambda.f_n + \mu.g_n$  converge uniformément vers  $\lambda.f + \mu.g$  sur  $I$ . Mais alors  $u_n = S_n - S_{n-1}$  converge uniformément vers la fonction nulle.

Le même exemple que précédemment, mais sur  $[0, 1]$ , montre que c'est une condition nécessaire non suffisante.

Montrer la convergence uniforme d'une série de fonction n'est pas simple. Dans la pratique, on applique le résultat suivant :

**THÉORÈME 11. (Caractérisation de la convergence uniforme)**

La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si :

- $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge simplement sur  $I$ , et
- La suite des restes  $(R_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.

**Démonstration.** Dans le sens direct la convergence uniforme entraîne la convergence simple, dans le sens réciproque la convergence simple permet de définir la suite des restes, et dans les deux sens :

$$\|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty$$

ainsi :

$$S_n \xrightarrow{u} S \iff \|S - S_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff \|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

si et seulement si  $R_n$  converge uniformément vers 0. ■

**Remarque.** Bien sûr on a le même résultat pour la convergence uniforme sur tout segment de  $I$  :

**THÉORÈME 12. (Caractérisation de la convergence uniforme sur tout segment)**

La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  si et seulement si :

- $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge simplement sur  $I$ , et
- La suite des restes  $(R_n)_{n \geq n_0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers la fonction nulle.

**Exemples.**

- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  :

– Convergence simple : fixons  $x \in [0, 1]$  ; la suite  $\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$  est décroissante et tend vers 0. D'après le théorème spécial des séries alternées, la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  converge. Puisque c'est vrai pour tout  $x \in [0, 1]$ , ça établit la convergence simple sur  $[0, 1]$ .

– Toujours d'après le théorème spécial des séries alternées, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$  :

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \implies \sup_{x \in [0, 1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la suite des restes vers la fonction nulle, c'est à dire la convergence uniforme de la série vers sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ .

- La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x+n^2}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En effet :

– Convergence simple : Pour  $x > 0$  fixé :

$$\frac{1}{x+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et donc par comparaison avec une série de Riemann, pour tout  $x > 0$ , la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x+n^2}$  converge. Il y a donc convergence simple.

– Convergence uniforme : Pour tout  $x > 0$

$$0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puisque la série de Riemann  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge. Il y a donc convergence uniforme :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

• Étudions la convergence simple/uniforme de  $\sum x e^{-nx}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

– Convergence simple : Par croissance comparée, pour tout  $x \geq 0$  fixé,  $n^2 x e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $x e^{-nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . La série numérique converge donc, par comparaison avec une série de Riemann, lorsque  $x \geq 0$  est fixé. Il y a donc convergence simple.

– Convergence uniforme : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-kx} = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Si il y avait convergence uniforme, on aurait convergence uniforme de la suite des restes  $(R_n)$  vers la fonction nulle. Or, prenons  $x_n = \frac{1}{n+1}$  :

$$R_n(x_n) = R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \times \frac{e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n+1}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \times \frac{e^{-1}}{\frac{1}{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e}$$

$R_n(x_n)$  ne tend pas vers 0. Donc  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |R_n(x)|$  ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme.

**Exercice 3.** Étudier la convergence simple et uniforme sur  $[0, 1]$  de :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n \quad ; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

**Résolution.**



### 2.1.2. Convergence normale.

Définissons pour les séries un nouveau concept de convergence, la convergence normale; c'est plus fort que la convergence uniforme, et plus pratique à manipuler, puisque c'est une condition qui porte directement sur le terme général de la série de fonction et plus sur le reste de la série.

#### DÉFINITION 6. (Convergence normale d'une série de fonctions)

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série de fonctions  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que la série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge normalement sur  $I$  lorsque : il existe une suite  $(\alpha_n)_{n \geq n_0}$  de réels positifs telle que :

- $\forall n \geq n_0, \forall x \in I, |u_n(x)| \leq \alpha_n$ , et
- la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n$  converge.

**Exemple.** La série de fonction  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-nx}}{n^2}$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet,  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  et la série de Riemann  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge.

On peut facilement reformuler cette définition à l'aide de la norme de la convergence uniforme.

#### PROPOSITION 13. (Caractérisation de la convergence normale)

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série de fonctions  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ . La série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si toutes les fonctions  $u_n$  sont bornées et la série numérique :

$$\sum_{n \geq n_0} \|u_n\|_{\infty} \text{ est convergente}$$

$$\text{où } \|u_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |u_n(x)|.$$

**Démonstration.** Pour le sens direct,  $\forall x \in I, |u_n(x)| \leq \alpha_n$  implique que les  $u_n$  sont bornées et  $\|u_n(x)\| \leq \alpha_n$ , d'où la convergence de la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n = \sum_{n \geq n_0} \|u_n\|_{\infty}$ , et dans le sens réciproque il suffit de prendre  $\alpha_n = \|u_n\|_{\infty}$ . ■

Le résultat fondamental est le suivant :

#### THÉORÈME 14. (CVN $\implies$ CVU)

La convergence normale sur  $I$  implique la convergence uniforme sur  $I$  et de plus :

$$\left\| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty} \quad (< +\infty)$$

**Démonstration.** Supposons que la série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge normalement : alors toutes les fonction  $u_n$  sont bornées sur  $I$  et la série numérique  $\sum \|u_n\|_{\infty}$  converge. En particulier pour tout  $a \in I$ , la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} u_n(a)$  converge absolument. Donc d'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $n \geq n_0$  et pour tout  $a \in I$  :

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(a) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k(a)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty}$$

L'inégalité étant vraie pour tout  $a \in I$ , en passant à la borne supérieure :

$$\left\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right\|_{\infty} = \sup_{a \in I} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(a) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty}$$

en particulier pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\|R_n\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puisque  $\sum \|u_n\|_{\infty}$  converge. Donc  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $I$  et de plus :

$$\left\| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty}$$

■

**Remarque.** La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant :

La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  (voir exemple ci-avant) mais ne converge pas normalement :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right| = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Ceci dit, pour prouver la convergence uniforme, on essayera le plus souvent de regarder d'abord s'il y a convergence normale, sinon on étudie le reste (il s'agit alors souvent de séries alternées vérifiant le critère spécial).

**COROLLAIRE 15.**

*Convergence normale  $\implies$  convergence uniforme  $\implies$  convergence simple.*

**Méthode.** Pour étudier la convergence simple/uniforme/normale on commence par regarder si on ne peut pas établir la convergence normale.

**Exercice 4.** Étudier la convergence sur  $[0, 1]$  de la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (x(1-x))^n$ .

**Résolution.**

Bien sur on peut définir aussi la convergence normale sur tout segment de  $I$  :

**DÉFINITION 7. (Convergence normale sur tout segment de  $I$ )**

Une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  de fonctions  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  converge normalement sur tout segment de  $I$  si pour tout segment  $[a, b] \subset I$ , la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n|_{[a,b]}$  converge normalement.

On obtient alors avec le théorème 14 :

**COROLLAIRE 16.**

*La convergence normale sur tout segment de  $I$  implique la convergence uniforme sur tout segment de  $I$ .*

**Exercice 5.** Déterminer l'ensemble de définition  $I$  de

$$x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$$

et étudier sa convergence uniforme sur tout segment de  $I$ .

**Résolution.**

## 2.2. Continuité de la somme.

Adaptons nos résultat sur la continuité d'une limite uniforme aux séries de fonctions.

**THÉORÈME 17. (Continuité de la somme)**

*Soit  $a \in I$ , si la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge uniformément sur  $I$  et si toutes les fonctions*

*$u_n$  sont continues en  $a$  alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est continue en  $a$ . Autrement dit*

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$$

*Si toutes les fonction  $u_n$  sont continues sur  $I$  alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est continue sur  $I$ .*

**Démonstration.** Découle immédiatement du théorème de continuité d'une limite uniforme de fonctions continues, la fonction somme partielle  $S_n(x) : x \mapsto \sum_{k=0}^n u_k(x)$  étant sous ces hypothèses continue en  $a$  et convergeant uniformément vers  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . ■

Bien sûr, la continuité étant une propriété locale, la convergence uniforme sur tout segment est suffisante.

**COROLLAIRE 18.**

*Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  et si toutes les fonctions  $u_n$  sont conti-*

*nues sur  $I$  alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est continue sur  $I$ .*

**Exercice 6.** Montrer que :

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

est continue sur un domaine que l'on précisera.

Résolution.

### 2.3. Théorème d'interversion Limite-Somme.

La convergence uniforme permet d'intervertir les symboles limite et somme :

#### THÉORÈME 19. (Interversion de la limite et de la somme)

On suppose que  $a \in I$  ou est une borne de  $I$ , que  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur  $I$  et que

$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \ell_n$  existe pour tout  $n \geq n_0$  alors :

- pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\ell_n \in \mathbb{K}$ ,
- $\sum_{n \geq n_0} \ell_n$  converge
- $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(x)$  existe et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ell_n.$$

**Remarque.** Lorsque  $a \in I$ , ce n'est rien d'autre que le théorème de continuité de la somme (en  $a \in I$ ). Aussi ce résultat n'apporte quelque chose que lorsque  $a$  est une borne de  $I$ .

**Démonstration.** Admis.

Il découle presque immédiatement d'un théorème d'interversion des limites pour les limites uniformes des suites de fonctions, mais qui est hors programme :

#### Théorème d'interversion des limites. (HP)

On suppose que  $a \in I$  ou est une borne de  $I$  et que  $f_n \xrightarrow{u} f$  sur  $I$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$  existe et appartient à  $\mathbb{K}$  pour tout  $n$ , alors :

- la suite  $(b_n)$  converge,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

après avoir remarqué que lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$  existe, sa limite  $\ell_n$  est nécessairement dans  $\mathbb{K}$  puisque la série convergeant uniformément, la suite  $u_n$  converge uniformément vers 0, et les fonctions  $u_n$  sont donc bornées. ■

#### Remarques.

- On peut choisir pour  $a$  une borne infinie,  $a = \pm\infty$ .
- On peut utiliser ce théorème pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme (en raisonnant par l'absurde).
- La convergence uniforme sur tout segment n'est cette fois-ci pas du tout suffisante pour appliquer le théorème. Par contre il suffit de vérifier les hypothèses sur un voisinage de  $a$  dans  $I$  pour pouvoir appliquer le théorème.

#### Exemples.

- Montrons que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  ne converge pas uniformément sur son domaine de définition  $]1, \infty[$  : pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{n}$$

or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $]1, +\infty[$ . Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment inclus dans  $]1, +\infty[$  (on vérifie donc que cette hypothèse plus faible n'est

pas suffisante).

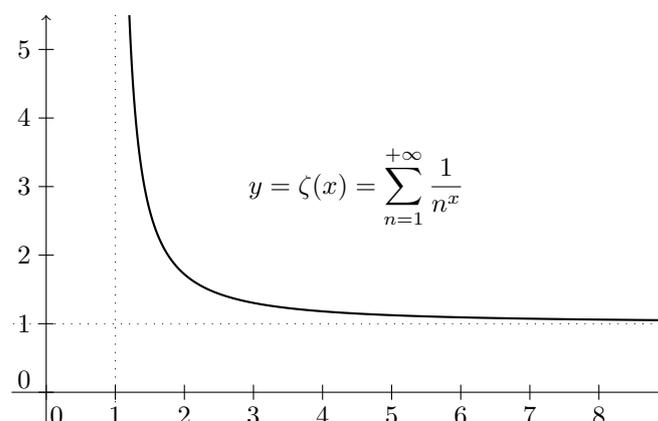
- Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Il y a convergence normale, et donc uniforme sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ ; en effet :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Pour  $n = 1$ ,  $\frac{1}{1^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_1 = 1$  tandis que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n \geq 1} \ell_n = 1$$



#### 2.4. Intégration terme à terme sur un segment.

Le théorème d'intégration sur un segment d'une limite uniforme de fonctions s'applique au cas d'une somme uniforme de fonctions. C'est le théorème de dérivation terme à terme sur un segment.

##### THÉORÈME 20. (Intégration terme à terme sur un segment)

Soit  $I = [a, b]$ ; si  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  avec  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ ,

alors la série  $\sum_{n \geq n_0} \int_a^b u_n$  converge,  $\sum_{n \geq n_0} u_n \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  et :

$$\int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b u_n$$

**Démonstration.** On sait que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ . Le résultat découle du théorème d'intégration sur un segment de la limite

uniforme (théorème 7) :  $\sum_{n=0}^N u_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et donc :

$$\int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_a^b \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N u_n(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{n=n_0}^N u_n(t) dt$$

Puisque par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b \sum_{n=n_0}^N u_n(t) dt = \sum_{n=n_0}^N \int_a^b u_n(t) dt$$

on obtient finalement :

$$\int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_a^b \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N u_n(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N \int_a^b u_n(t) dt = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$$

**Exemple.** Calcul de  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - e^{it}} dt$ .

On a pour tout  $t \in [0, 2\pi]$  :

$$\frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{2}} = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n$$

Puisque  $\left|\frac{e^{it}}{2}\right| < 1$ . La série converge normalement puisque :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \forall n \in \mathbb{N}, \left|\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n\right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

Ainsi :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - e^{it}} dt = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n dt$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{i(n+1)2^n} \times [e^{i(n+1)t}]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - e^{it}} dt = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$$

**Remarque.** Nous verrons un théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque et sous hypothèse de convergence simple (en autres) dans le chapitre sur les intégrales à paramètres.

## 2.5. Dérivation terme à terme.

Pour la dérivation de la somme,  $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^p$ , là encore les résultats sont des applications au cas des séries de fonctions des résultats plus généraux sur les suites de fonctions.

### THÉORÈME 21. (Théorème de dérivation terme à terme)

Soit  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On suppose que :

- $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge simplement sur  $I$ ,
- $\sum_{n \geq n_0} u'_n$  converge uniformément sur  $I$  (resp. sur tout segment de  $I$ )

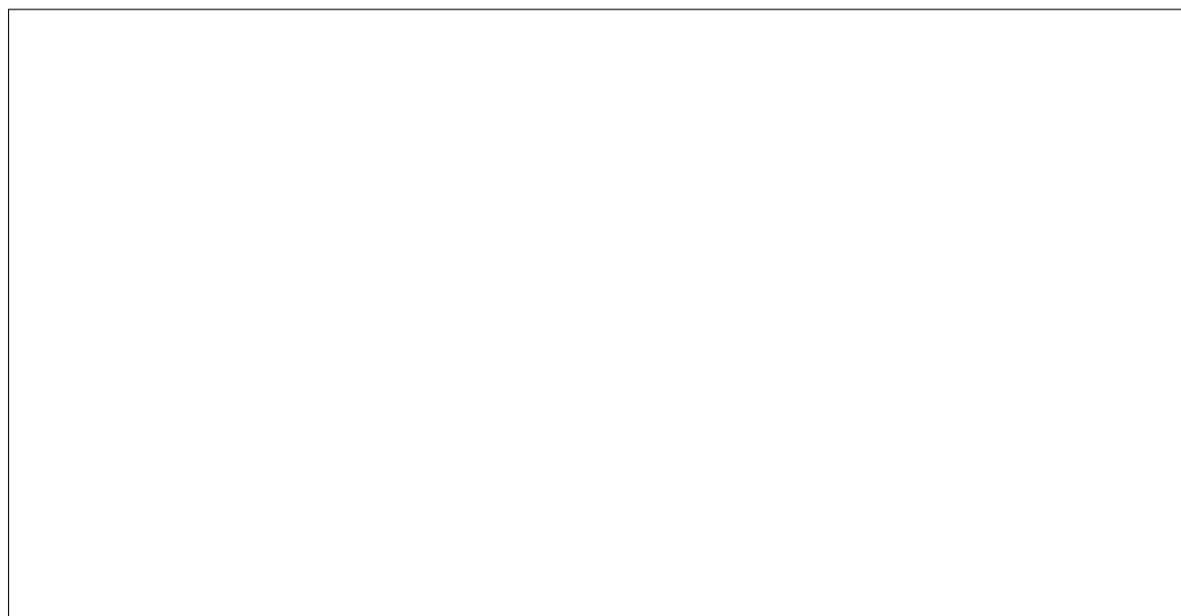
$$\text{alors } \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u'_n$$

**Démonstration.** Découle immédiatement du théorème 8 de dérivation  $\mathcal{C}^1$  d'une suite de fonctions et de la linéarité de la dérivation. ■

**Remarque.** Comme dans le théorème 8, on peut aussi conclure que  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

**Exercice 7.** Montrer que la fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1, +\infty[$  et déterminer son sens de variation.

**Résolution.**



Généralisons, comme pour les séries de fonctions, aux dérivées successives des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  :

**THÉORÈME 22. (Dérivation  $\mathcal{C}^p$  pour les séries de fonctions)**

Soit  $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ . On suppose que :

- pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{n \geq n_0} u_n^{(k)}$  converge simplement sur  $I$ ,
- $\sum_{n \geq n_0} u_n^{(p)}$  converge uniformément sur  $I$  (resp. sur tout segment de  $I$ ),

alors  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $\left( \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right)^{(k)} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ .

**Démonstration.** Ici aussi le résultat découle immédiatement du théorème 10 de dérivation  $\mathcal{C}^p$  d'une suite de fonctions (ainsi que de la linéarité de la dérivation). ■

**Exemple.** Montrons que la fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$  est infiniment dérivable de dérivées successives :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ]1, +\infty[, \left( \frac{1}{n^x} \right)^{(k)} = (-1)^k \times \frac{\ln^k n}{n^x}$$

Soit  $a > 1$  quelconque ; on a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, \left| \left( \frac{1}{n^x} \right)^{(k)} \right| \leq \frac{\ln^k n}{n^a}$$

qui est le terme général d'une série de Bertrand convergente, puisque pour  $1 < b < a$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\ln^k n}{n^a} = o_{+\infty} \left( \frac{1}{n^b} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^b} \text{ converge}$$

Ainsi pour tout  $a > 1$ , il y a convergence normale sur  $[a, +\infty[$  de toutes les séries des dérivées successives, c'est à dire pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , de  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n^x} \right)^{(k)}$ . En appliquant le théorème de dérivation  $\mathcal{C}^p$  sur

$[a, +\infty[$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on en déduit donc que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, +\infty[$  pour

tout  $a > 1$ , et donc sur  $]1, +\infty[$  et que :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}$$

Déterminons maintenant un équivalent et la limite en  $1^+$  de  $\zeta(x)$ ; puisqu'il n'y a pas convergence uniforme le théorème d'inversion limite/somme ne s'applique pas; on se doute d'ailleurs que cette limite est  $+\infty$  (voir allure de la courbe plus haut).

Utilisons des comparaisons avec des intégrales; pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout  $x > 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^x} &\leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} && \text{puisque } t \mapsto \frac{1}{t^x} \text{ est décroissante} \\ \implies \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt &\leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt && \text{pour tout } n \geq 2 \end{aligned}$$

soit  $N \geq 2$  un entier; en sommant les inégalités de  $n = 2$  à  $N$  :

$$\begin{aligned} \implies \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt &\leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt \\ \implies \int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} dt &\leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x} dt && \text{d'après Chasles} \\ \implies \int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} dt &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{t^x} dt && \text{puisque } \frac{1}{1^x} = 1 \\ \implies \left[ \frac{t^{-x+1}}{1-x} \right]_1^{N+1} - \int_1^2 \frac{1}{t^x} dt &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \left[ \frac{t^{-x+1}}{1-x} \right]_1^N \end{aligned}$$

et puisque  $\int_1^2 \frac{1}{t^x} dt \leq (2-1) \max_{t \in [1,2]} \frac{1}{t^x} = 1$

$$\implies \frac{(N+1)^{-x+1}}{1-x} + \frac{1}{x-1} - 1 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \frac{N^{-x+1}}{1-x} + \frac{1}{x-1}$$

en passant à la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$

$$\implies \frac{1}{x-1} - 1 \leq \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

et puisque  $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$

$$\implies \boxed{\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty}.$$

### Remarques.

- Noter l'utilisation de la convergence normale sur des intervalles adaptés  $[a, +\infty[$  plutôt que sur tout segment de  $]1, +\infty[$ .
- Noter aussi l'encadrement par des intégrales pour le calcul d'un équivalent. C'est une méthode usuelle sur les séries, séries de fonctions comprises.