Chapitre 6

Algèbre linéaire : révisions et compléments

https://www.jean-philippe-preaux.fr

A. Matrices et systèmes linéaires

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p et q deux entiers strictement positifs.

1. Les matrices

1.1. Matrice de type (p, q).

Définition 1.

• *On appelle matrice A à p lignes et q colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$, une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ de la forme :*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} .$$

On la représente sous la forme d'un tableau à p lignes et q colonnes, le scalaire $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ figurant ligne i colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

• *La matrice est dite de type (p, q).*

• *L'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.*

Remarque. L'élément ligne i colonne j de la matrice A pourra aussi se noter $A_{i,j}$.**Exemples.**

• La matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls, notée :

$$O_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

• Les éléments de $\mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{K})$ sont appelés des matrices lignes.
• Les éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont appelés des matrices colonnes.

1.2. Opérations et lois sur les matrices.

1.2.1. *Addition.*

DÉFINITION 2. (Addition de matrices)
Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$; la somme des matrices A et B est la matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ notée $A+B$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

La somme des matrices s'opérant terme à terme, elle hérite des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$:

PROPRIÉTÉ 1. (De l'addition matricielle)
$\forall\,(A,B,C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^3$:
- $A+B = B+A$ *(Commutativité)*
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(Associativité)*
- $A + O_{p,q} = A$ *($O_{p,q}$ et l'élément neutre de $+$)*
- *en notant $-A$ la matrice définie par* $-A = (-A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$
  $A + (-A) = O_{p,q}$ *$-A$ est l'opposée de A*

Remarque. Autrement dit, $(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est $O_{p,q}$.

1.2.2. *Multiplication par un scalaire.*

On parle de scalaire, pour désigner un élément de $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 3. (Multiplication par un scalaire)
Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$; on note $\lambda.A$ la matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (\lambda.A)_{i,j} = \lambda \times A_{i,j}.$$

Remarque. La matrice opposée de A est $-A = (-1).A$.

PROPRIÉTÉ 2.

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), &\quad 1 \cdot A = A \\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), &\quad \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \times \beta) \cdot A \\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), &\quad (\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, &\quad \alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \end{aligned}$$

Démonstration. La multiplication par un scalaire s'effectuant terme à terme sur les coefficients de la matrices, elles découlent toutes immédiatement de l'associativité de la multiplication et de la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}$.
En guise d'exemple ; pour la quatrième :
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$[\alpha(A+B)]_{i,j} = \alpha \times (A+B)_{i,j} = \underbrace{\alpha(A_{i,j}+B_{i,j}) = \alpha A_{i,j} + \alpha B_{i,j}}_{\text{par distributivité de } \times \text{ sur } + \text{ dans } \mathbb{K}} = (\alpha A + \alpha B)_{i,j}$$

Puisque les matrices $\alpha(A+B)$ et $\alpha A + \alpha B$ ont même type (p,q) et mêmes coefficients, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$. ■

Remarque. Autrement dit, $(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2.3. *Produit matriciel.*

Définition 4. (Produit matriciel)
Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Le produit de A par B est la matrice notée $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad C_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Remarques.
- Le produit $A \times B$ est défini ssi le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.
- Le calcul du coefficient ligne i colonne j de la matrice produit $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ s'effectue à l'aide de la ligne i de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et de la colonne j de la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$.

$$a_{i,1} \times b_{1,j} \quad + \quad a_{i,k} \times b_{k,j} \quad + \quad a_{i,p} \times_{p,j}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + \cdots + a_{i,k} \times b_{k,j} + \cdots + a_{i,p} \times b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Remarques.
Le produit d'une matrice de type (p,q) par une matrice colonne de type $(q,1)$ est une matrice colonne de type $(p,1)$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}_{(p,q)} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}_{(q,1)} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{1,k} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{p,k} \times x_k \end{pmatrix}_{(p,1)}$$

- Le produit d'une matrice ligne de type $(1,p)$ par une matrice de type (p,q) est une matrice ligne de type $(1,q)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}_{(p,q)} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} x_k a_{k,1} & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{q} x_k a_{k,q} \end{pmatrix}$$

Propriété 3.
- $\forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$,
  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ *Associativité*

• $\forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall (B,C) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$,

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \qquad \textit{Distributivité à gauche}$$

• $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\ \forall C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$,

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C \qquad \textit{Distributivité à droite}$$

• $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B) \qquad \textit{Compatibilité avec la loi externe}$$

Démonstration. Toutes découlent de la linéarité de la somme, avec en outre la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}$ (pour la distributivité), l'associativité de $\times$ dans $\mathbb{K}$ (pour la compatibilité avec la loi externe), et l'égalité des décompositions ligne/colonne, colonne/ligne d'une somme double (pour l'associativité). Détaillons-ce dernier calcul ; soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$:

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{i,k} \times C_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \right) \times C_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} = \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} \qquad \text{interversion des deux } \sum \\
&= \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \sum_{k=1}^{r} B_{t,k} \times C_{k,j} = \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times (BC)_{t,j} = [A(BC)]_{i,j}
\end{aligned}$$

■

Remarque. Certaines propriétés de la multiplication dans $\mathbb{K}$ ne sont plus vérifiées pour le produit matriciel :

• Le produit matriciel n'est pas commutatif : on peut avoir $AB \neq BA$.

– AB peut être défini sans que BA ne le soit.

– AB et BA peuvent être tous les deux définis mais pas de même type.

– Même lorsque AB et BA sont définies et de même type, on n'a pas en général $AB = BA$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; alors $AB \neq BA$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = AB \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = BA$$

• Le produit matriciel est non intègre : on peut avoir $AB = O$ avec $A \neq O$ et $B \neq O$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcul de AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = O_{2,2}$$

1.3. **Transposée de matrice.**

DÉFINITION 5.
Soit A une matrice de type (p,q) ; la matrice transposée de A, ,notée A^{T} (ou ${}^tA$), est la matrice de type (q,p) dont les coefficient sont :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!],\ (A^{\mathsf{T}})_{i,j} = A_{j,i}$$

Remarque. C'est à dire que :
la ligne i de A^{T} est la colonne i de A, la colonne j de A^{T} est la ligne j de A.

Exemples.

•

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$$

•
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \qquad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})$$

Propriété 4.
Soient A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in K$.

•
$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$$

•
$$(A^\top)^\top = A$$

• *Si la somme $A + B$ est bien définie, alors $A^\top + B^\top$ est bien définie et :*
$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top$$

• *Si le produit $A \times B$ est bien défini, alors $B^\top \times A^\top$ est bien défini et :*
$$(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre :
• Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$: $\left((\lambda \cdot A)^\top\right)_{i,j} = (\lambda \cdot A)_{j,i} = \lambda \times A_{j,i} = \lambda \times \left(A^\top\right)_{i,j}$. Donc $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$.

• Soit A de type (p, q), alors $\left(A^\top\right)^\top$ est de type (p, q) et $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$: $\left(\left(A^\top\right)^\top\right)_{i,j} = \left(A^\top\right)_{j,i} = A_{i,j}$. Ainsi $\left(A^\top\right)^\top = A$.

• Soient A et B de type (p, q) de sorte que $A + B$ est défini. Alors $A^\top$ et $B^\top$ sont de type (q, p), $A^\top + B^\top$ est bien défini et de type (q, p), tout comme $(A + B)^\top$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$:
$$\left((A + B)^\top\right)_{i,j} = (A + B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = A^\top_{i,j} + B^\top_{i,j}.$$
Donc $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.

• Soient A de type (p, q) et B de type (q, r) de sorte que $A \times B$ soit défini et de type (p, r). Alors $B^\top$ est de type (r, q), $A^\top$ est de type (q, p), ainsi $B^\top \times A^\top$ est défini et de type (r, p) tout comme $(A \times B)^\top$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, r]\!] \times [\![1, p]\!]$:
$$\begin{aligned} \left((A \times B)^\top\right)_{i,j} &= (A \times B)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{q} A_{j,k} \times B_{k,i} = \sum_{k=1}^{q} A^\top_{k,j} \times B^\top_{i,k} = \sum_{k=1}^{q} B^\top_{i,k} \times A^\top_{k,j} = \left(B^\top \times A^\top\right)_{i,j} \end{aligned}$$
Donc $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$.

■

Remarque. En appliquant plusieurs fois la transposée d'un produit :
$$(A \times B \times C)^\top = ((A \times B) \times C)^\top = C^\top \times (A \times B)^\top = C^\top \times B^\top \times A^\top$$
$$(A \times B \times C \times D)^\top = ((A \times B \times C) \times D)^\top = D^\top \times (A \times B \times C)^\top = D^\top \times C^\top \times B^\top \times A^\top$$
etc...

2. Les matrices carrées

2.1. Matrices carrées et leurs opérations.

Définition 6.
On appelle matrice carrée d'ordre p toute matrice de type (p, p).
On désignera par $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est muni des deux opérations :
– L'addition de matrices $+$,
– La multiplication de matrices $\times$.

Remarque. Addition et multiplication sont des opérations bien définies dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Pour rappel l'addition est associative, commutative, et admet pour élément neutre la matrice nulle d'ordre p, notée O_p. La multiplication est associative et en général n'est pas commutative. Elle admet aussi un élément neutre : la matrice identité notée I_p.

Remarque. La matrice nulle O_p est un élément absorbant pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$\forall M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), \quad M \times O_p = O_p \times M = O_p.$

DÉFINITION 7.
La matrice identité d'ordre p, notée I_p est la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ (I_p)_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Autrement dit :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(p,p)}$$

La matrice I_p est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, c'est-à-dire :

Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$A \times I_p = I_p \times A = A$$

Plus généralement :

PROPRIÉTÉ 5.
Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$I_p \times A = A \qquad et \qquad A \times I_q = A$$

Démonstration. Puisque $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $I_p \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ et $I_q \in \mathscr{M}_{q,q}(\mathbb{K})$, les produits $I_p \times A$ et $A \times I_q$ sont bien définis et de type (p,q).
Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$(I_p \times A)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (I_p)_{i,k} \times A_{k,j} = (I_p)_{i,i} \times A_{i,j} = A_{i,j}}_{\text{car } (I_p)_{i,k} = 1 \text{ si } k=i \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

Donc $I_p \times A = A$. Et :

$$(A \times I_q)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (I_q)_{k,j} = A_{i,j} \times (I_q)_{j,j} = A_{i,j}}_{\text{car } (I_q)_{k,j} = 1 \text{ si } k=j \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

Donc $A \times I_q = A$. ■

Remarques. (HP) En d'autre termes $(\mathscr{M}_p(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, d'unité I_p et $(\mathscr{M}_p(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Évidemment $I_p^\top = I_p$.

2.2. Puissance de matrices.

DÉFINITION 8.
• *Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ on note :*

$$A^0 = I_p \qquad ; \qquad A^1 = A \qquad ; \qquad A^2 = A \times A$$

et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\ fois}$$

Les puissances de matrices vérifient les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 6.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$:

$$A^n \times A^m = A^{n+m} \qquad ; \qquad (A^n)^m = A^{n\times m}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda.A)^n = \lambda^n.A^n$$

et :

$$(I_p)^n = I_p$$

Si $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et si A et B commutent (pour $\times$) :

$$(A \times B)^n = A^n \times B^n$$

Démonstration. Elle est analogue à la démonstration des mêmes propriétés des puissances dans $\mathbb{K}$. ■

Remarque. En particulier toutes les puissance d'une même matrices commutent entre-elles :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ A^n \times A^m = A^m \times A^n$$

en effet : $A^n \times A^m = A^{n+m} = A^{m+n} = A^m \times A^n$.

En particulier $I_p = A^0$ commute avec toute matrice A dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Plus généralement :

PROPRIÉTÉ 7.
Soient A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre-elles. Alors $\forall\,(n, m) \in \mathbb{N}^2$, A^n et B^m commutent entre elles.

Démonstration. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre elles. Montrons que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent entre-elles. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $m = 0$, $B^0 = I_p$ commute avec A. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang m. Alors par associativité de $\times$, par hypothèse de récurrence et car A et B commutent :

$$\begin{aligned} A \times B^{m+1} &= A \times (B^m \times B) = (A \times B^m) \times B \underset{(HR)}{=} (B^m \times A) \times B = B^m \times (A \times B) \\ &= B^m \times (B \times A) = (B^m \times B) \times A = B^{m+1} \times A \end{aligned}$$

Ainsi A et B^{m+1} commutent entre-elles ; l'assertion est vraie au rang $m + 1$.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent. En appliquant ce que l'on vient de démontrer à B^m et A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n et B^m commutent. ■

La transposée d'une puissance est la puissance de la transposée :

PROPRIÉTÉ 8.
Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(A^\top\right)^n = (A^n)^\top$$

Démonstration. Par récurrence sur n.

(I) Pour $n = 0$, $\left(A^\top\right)^n = I_p$ et $(A^n)^\top = I_p^\top = I_p$. L'assertion est donc vraie.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n. En appliquant la transposée d'un produit :

$$\left(A^\top\right)^{n+1} = \left(A^\top\right)^n \times A^\top = (A \times A^n)^\top = \left(A^{n+1}\right)^\top$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $(n + 1)$. ■

Exercice 1. On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$$

a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n \times X_0$.

b) Calculer A^2. En déduire A^{2m} et A^{2m+1} pour tout $m \in \mathbb{N}$.

c) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

Résolution.

Comme on le voit, de nombreux problèmes se ramènent au calcul des puissances d'une matrice carrée. La formule du binôme peut alors s'avérer utile pour calculer la puissance d'une somme. Le problème c'est que dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ elle n'est plus vraie en toute généralité, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ en général $(A+B)^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$. En effet :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & (A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2 \\ \iff & A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2.AB + B^2 \\ \iff & BA = AB && \text{en soustrayant } A^2 + B^2 + AB \\ \iff & A \text{ et } B \text{ commutent} \end{aligned}$$

THÉORÈME 9. (Formule du binôme)
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Remarque. On étend la notation $\sum$ aux matrices ; les propriétés algébriques d'une somme (linéarité, changement d'indice, décrochage, télescopage) restent vraies.

Démonstration. Elles est demeure identique à celle effectuée dans $\mathbb{K}$ (par récurrence et en appliquant la relation de Pascal), dès que l'on a remarqué que si A et B commutent alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B (propriété 7). ∎

Exercice 2. En écrivant $A = I_3 + B$, calculer à l'aide de la formule du binôme, les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution.

2.3. **Matrice inversible.**

Définition 9. (Inversibilité/inverse d'une matrice)
Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$AB = BA = I_p.$$

Dans ce cas la matrice B peut se noter A^{-1} et est appelée l'inverse de A.

Remarques.
– L'inversibilité n'a de sens que pour une matrice carrée.
– Une matrice carrée n'est pas en général inversible ; par exemple les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles.
– L'inverse lorsqu'il existe est unique, en effet : soient B et C deux inverses de A :

$$AB = I_n \implies CAB = CI_n \implies I_n B = C \implies B = C.$$

– Si A est inversible et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda \cdot A$ est inversible d'inverse $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.
– L'inverse A^{-1} d'une matrice inversible A est aussi inversible et admet pour inverse : $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
– Si $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ sont inversibles, leur produit $A \times B$ l'est aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

– Tout puissance d'une matrice inversible A est inversible et $\forall n \in \mathbb{N},\ (A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.

Proposition-Définition 10. (Le groupe linéaire)
L'ensemble des matrices inversible de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ muni de l'opération $\times$ forme un groupe noté $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \times)$ appelé et le groupe linéaire de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
Autrement dit :
– $\forall (A, B) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})^2,\ A \times B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.
– $\forall A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ A^{-1} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

Notons qu'une matrice est inversible ssi elle est inversible à droite ssi elle est inversible à gauche. Nous admettrons pour l'instant ce résultat, qui découle du fait que pour un endomorphisme être bijectif équivaut à être injectif ou surjectif.

Proposition 10.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; alors :
$$B = A^{-1} \iff AB = I_p \iff BA = I_p.$$

Démonstration. Sera donnée lorsqu'on aura revu les applications linéaires. ∎

Proposition 11.
Si A est une matrice inversible, sa transposée l'est aussi et :
$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$$

Démonstration. En appliquant la transposée d'un produit :
$$A^\top \times \left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1} \times A\right)^\top = I_p^\top = I_p$$
Ainsi $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$. ∎

2.4. Polynôme de matrice.

Définition 11. (Polynôme de matrice)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ on note :
$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot A^k$$
C'est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qu'on appelle polynôme de matrice.

Exemple. Avec $P = 1 + X + X^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\implies P(A) = A^0 + A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Les polynômes de matrice ont des propriétés naturelles ; les opérations sur les polynômes de matrice coïncident avec les opérations sur les polynômes.

Proposition 12. *Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.*
$$(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ ($n \geqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$). Alors par définition :

$$(P+Q)(A) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot A^k + b_k \cdot A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot A^k + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot A^k = P(A) + Q(A)$$

par linéarité de la somme. ■

Proposition 13. *Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :*

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $b_m \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(P \times b_m X^m)(A) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_m X^{k+m}\right)(A) = \sum_{k=0}^{n} (a_k b_m) \cdot A^{k+m} = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot A^k) \times (b_m \cdot A^m) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot A^k\right) \times b_m \cdot A^m \\ &= P(A) \times b_m \cdot A^m \qquad (*)\end{aligned}$$

par distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}[X]$, et par propriété des puissances, compatibilité de $\cdot$ avec $\times$ et distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

En notant $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, on a alors avec ce qui précède et la proposition 12, et par distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}(P \times Q)(A) &= \left(P \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right)(A) = \left(\sum_{k=0}^{m} P \times b_k X^k\right)(A) \underset{(12)}{=} \sum_{k=0}^{m} \left(P \times b_k X^k\right)(A) \underset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{m} P(A) \times b_k A^k = P(A) \times \sum_{k=0}^{m} b_k A^k \\ &= P(A) \times Q(A)\end{aligned}$$

■

Corollaire 14. *Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent*

Démonstration. Découle de la proposition 13 et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P(A) \times Q(A) \underset{(13)}{=} (P \times Q)(A) = (Q \times P)(A) \underset{(13)}{=} Q(A) \times P(A)$$

■

Définition 12. (Polynôme annulateur)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; P est appelé polynôme annulateur de A si $P(A) = O_p$.

Exemple. Le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; en effet :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = A^2 \qquad A^2 - A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 6-4-2 & -10+10-0 \\ 1-1-0 & -1+3-2 \end{pmatrix} = O_2$$

Méthode. Un polynôme annulateur P d'une matrice A, permet le calcul :
- d'un inverse de A : lorsque le monôme de degré 0 de P est non-nul,
- des puissances de A : si P est de degré d, toutes les puissances A^n pour $n \geqslant d$ sont combinaisons linéaires des matrices $A^0, A^1, \ldots, A^{d-1}$:
$$\forall n \geqslant d,\ \exists(\alpha_n, \beta_n, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{K}^d,\ A^n = \alpha_n \cdot A^0 + \beta_n \cdot A^1 + \cdots + \zeta_n \cdot A^{d-1}$$
et les suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$,..., $(\zeta_n)_n$ sont des suites récurrentes linéaires imbriquées. Si l'on parvient à exprimer α_n, β_n, ..., ζ_n en fonction de n on obtient l'expression des coefficients de A^n.

Voyons un exemple en exercice :

Exercice 3. On reprend le polynôme $P = X^2 - X - 2$ annulateur de $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) En déduire l'inverse de A.

b) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que :

$$A^n = \alpha_n \cdot I_2 + \beta_n \cdot A$$

Obtenir des relations de récurrence pour les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$, et en déduire les expressions de α_n, β_n en fonction de n, et les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Résolution.

2.5. **Matrices carrées remarquables.**

2.5.1. *Matrices scalaires.*

Définition 13. (Matrices scalaires)
Une matrice scalaire d'ordre p est une matrice de la forme $\lambda.I_p$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda.I_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque. Multiplier une matrice A par la matrice scalaire $\lambda.I_p$ revient à multiplier A par le scalaire λ :

$$(\lambda.I_p) \times A = \lambda.(I_p \times A) = \lambda.A$$
$$A \times (\lambda.I_p) = \lambda.(A \times I_p) = \lambda.A$$

En particulier :

PROPRIÉTÉ 15.
Une matrice scalaire commute avec toute matrice carrée de même ordre.

Les opérations entre matrices scalaires sont particulièrement simples puisqu'elles reviennent à opérer sur les scalaires :

PROPRIÉTÉ 16.
- *Somme, combinaison linéaire, produit, puissances de matrices scalaires sont des matrices scalaires et :*

$$\lambda.I_p + \mu.I_p = (\lambda + \mu).I_p \quad ; \quad a.(\lambda.I_p) + b.(\mu.I_p) = (a\lambda + b\mu).I_p$$
$$\lambda.I_p \times \mu.I_p = (\lambda \times \mu).I_p \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.I_p)^n = \lambda^n.I_p$$

- *Une matrice scalaire $\lambda.I_p$ est inversible si et seulement si λ est inversible (i.e. $\lambda \neq 0$), et dans ce cas :*

$$(\lambda.I_p)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.I_p$$

Démonstration. Elle est immédiate. ∎

2.5.2. *Matrices diagonales.*

DÉFINITION 14. (Matrice diagonale)
Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls :

$$A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \text{ est diagonale si } \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \implies A_{i,j} = 0$$

On note alors :

$$A = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Remarque. Le calcul du produit d'une matrice par une matrice diagonale est simple à calculer :

– Multiplier une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ à gauche par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque ligne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_1.a_{1,2} & \cdots & \lambda_1.a_{1,q} \\ \lambda_2.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_2.a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_p.a_{p,1} & \lambda_p.a_{p,2} & \cdots & \lambda_p.a_{p,q} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(D \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} D_{i,k} \times a_{k,j} = D_{i,i} \times a_{i,j} = \lambda_i \times a_{i,j}$$

– Multiplier une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ à droite par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque colonne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_2.a_{1,2} & \cdots & \lambda_p.a_{1,p} \\ \lambda_1.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_p.a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1.a_{q,1} & \lambda_2.a_{q,2} & \cdots & \lambda_p.a_{q,p} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(A \times D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times D_{k,j} = a_{i,j} \times D_{j,j} = a_{i,j} \times \lambda_j$$

Entre des matrices diagonales toutes les opérations se font terme à terme ; cela rend leur calcul très simple :

Propriété 17.
Pour des matrices diagonales de même ordre p :
• *La somme de matrices diagonales est diagonale :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) + Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots, (a_p + b_p))$$

• *Une combinaison linéaire de matrices diagonales est diagonale :*

$$\lambda.Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) + \mu.Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((\lambda a_1 + \mu b_1), (\lambda a_2 + \mu b_2), \dots, (\lambda a_p + \mu b_p))$$

• *Le produit de matrices diagonales est diagonal :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) \times Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1 \times b_1), (a_2 \times b_2), \dots, (a_p \times b_p))$$

• *Une puissance de matrice diagonale est diagonale :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^n = Diag(a_1^n, a_2^n, \dots, a_p^n)$$

• *Une matrice diagonale est inversible si set seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls ; dans ce cas :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^{-1} = Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_p}\right)$$

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de la définition de l'addition de matrices.

Le second découle immédiatement des définition de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire. Le troisième point découle immédiatement de la remarque ci-dessus.

Le quatrième point s'en déduit par récurrence sur n.

Pour le cinquième point il découle du deuxième que si les a_i sont tous non nuls :

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) \times Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_p}\right) = Diag\left(\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \dots, \frac{a_p}{a_p}\right) = I_p$$

Montrons que si $A = Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est inversible alors tous les a_i sont non nuls. Par contraposée : supposons que l'un des a_i soit nul. Alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $A \times M$ n'a que des zéros sur sa ligne i, et ne peut donc pas être égal à I_p. Ainsi A n'est pas inversible. ■

Remarque. Toutes les matrices diagonales de même ordre commutent entre-elles.

2.5.3. *Matrices triangulaires.*

Définition 15. (Matrices triangulaires)
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si :

$$i > j \ (\textit{respectivement } i < j) \implies a_{i,j} = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Propriété 18.
Pour des matrices triangulaires de mêmes ordres :
• *La somme de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).*
• *Une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).*
• *Le produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus ses coefficients diagonaux s'obtiennent en faisant le produit terme à terme.*
• *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas son inverse est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Elles sont menées pour les matrices triangulaires supérieures. En transposant on les déduit pour les triangulaires inférieures.
Considérons A et B deux matrices triangulaires supérieures d'ordre p, λ, μ deux scalaires et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.
• Si $i > j$ alors $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ et donc $A_{i,j} + B_{i,j} = 0$; ainsi $i > j \implies (\lambda.A + \mu.B)_{i,j} = \lambda.A_{i,j} + \mu.B_{i,j} = 0$. Donc $\lambda.A + \mu.B$ est triangulaire supérieure.
• Par la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned}(A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j} \\ \text{si } i > j \text{ alors } (A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + \sum_{k=i}^{p} A_{i,k} \times \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = 0\end{aligned}$$

donc $A \times B$ est triangulaire supérieure

$$\begin{aligned}\text{si } i = j \text{ alors } (A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + A_{i,i} \times B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{p} A_{i,k} \times \underbrace{B_{k,j}}_{=0} \\ &= A_{i,i} \times B_{i,i}\end{aligned}$$

et donc le terme diagonal ligne i colonne i de $A \times B$ est le produit des termes diagonaux ligne i colonne i de A et B.
• Quant à l'inversibilité d'une matrice triangulaire supérieure, on repousse la démonstration à l'exercice 6, §4 (page 25). ■

2.5.4. *Matrices symétriques et antisymétriques.*

Définition 16. (Matrices symétriques)
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$A^{\mathsf{T}} = A$$

Autrement dit, une matrice symétrique est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{p-1,p} \\ a_{1,p} & \cdots & a_{p-1,p} & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Exemple. Les matrices I_p et O_p sont symétriques ; plus généralement, toute matrice scalaire, toute matrice diagonale est symétrique. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est symétrique et non diagonale.

Propriété 19.
• *La somme de matrices symétriques est symétrique.*
• *Une combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique.*
• *Une puissance de matrice symétrique est symétrique.*

- *L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices symétriques d'ordre p et λ, μ deux scalaires.
- Puisque $A^\top = A$ et $B^\top = B$, $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)^\top = \lambda \cdot A^\top + \mu \cdot B^\top = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$ donc $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)$ est symétrique.
- Puisque $A^\top = A$; soit $n \in \mathbb{N}$: $(A^n)^\top = \left(A^\top\right)^n = A^n$ donc A^n est symétrique.
- Soit A une matrice symétrique et inversible ; puisque $A^\top = A$: $(A^{-1})^\top = \left(A^\top\right)^{-1} = A^{-1}$ Donc l'inverse A^{-1} de A est symétrique. ■

Remarque. Attention, le produit de matrices symétriques n'est pas en général une matrice symétrique.

Exemple. Soient les marices symétriques A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

leur produit $A \times B$ n'est pas symétrique.

Exercice 4.
1) Soit A une matrices carrée.
   a) Montrer que la matrice $A + {}^tA$ est symétrique.
   b) Montrer que la matrice $A \times {}^tA$ est symétrique.
2) Soient A et B deux matrices symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $A \times B$ soit une matrice symétrique.

Résolution.

Définition 17. (Matrices anti-symétriques)
Une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ est dite anti-symétrique si elle est égale à l'opposée de sa transposée :

$$A^\top = -A$$

Autrement dit, une matrice anti-symétrique est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ -a_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{p-1,p} \\ -a_{1,p} & \cdots & -a_{p-1,p} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. La matrice O_p est anti-symétrique ; c'est la seule matrice diagonale qui l'est. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

est anti-symétrique.

Propriété 20.
- *La somme de matrices anti-symétriques est anti-symétrique.*

• *Une combinaison linéaire de matrices anti-symétriques est anti-symétrique.*
• *La puissance A^n d'une matrice anti-symétrique A est symétrique si n est pair, anti-symétrique si n est impair.*
• *L'inverse d'une matrice anti-symétrique inversible est une matrice anti-symétrique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices anti-symétriques d'ordre p et λ, μ deux scalaires.
• Puisque $A^\top = -A$ et $B^\top = -B$: $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)^\top = \lambda \cdot A^\top + \mu \cdot B^\top = -(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)$ donc $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)$ est anti-symétrique.
• Puisque $A^\top = -A$; soit $n \in \mathbb{N}$: $(A^n)^\top = \left(A^\top\right)^n = (-A)^n = (-1)^n \cdot A^n$ donc A^n est symétrique (respectivement anti-symétrique) ssi n est pair (respectivement impair).
• Soit A une matrice anti-symétrique et inversible ; puisque $A^\top = -A$: $(A^{-1})^\top = \left(A^\top\right)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$ Donc l'inverse A^{-1} de A est anti-symétrique. ■

Remarque. Toute matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique ; en effet soit $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + M^\top\right)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(M - M^\top\right)}_{\text{anti-symétrique}}$$

Les ensembles $\mathscr{S}_p(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_p(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et anti-symétriques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ d'intersection réduite à $\{O_p\}$. D'où l'unicité de l'écriture.

En d'autres termes, $\mathscr{S}_p(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_p(\mathbb{K})$ sont des espaces supplémentaires dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\mathscr{M}_p(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_p(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_p(\mathbb{K}).$$

2.6. Trace d'une matrice carrée.

DÉFINITION 18. (Trace d'une matrice)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; la trace de A notée $tr(A)$ est le scalaire :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$$

ou autrement dit, c'est la somme des éléments sur la diagonale de A.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{pmatrix}$; $tr(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

PROPRIÉTÉ 21.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et λ, μ deux scalaires.
• $tr(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$.
• $tr\left(A^\top\right) = tr(A)$.
• $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, et λ, μ deux scalaires.

• $tr(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda \cdot A + \mu \cdot B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} \lambda \cdot a_{i,i} + \mu \cdot b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{p} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{p} b_{i,i} = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$.

• $tr\left(A^\top\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(A^\top\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} a_{i,i} = tr(A)$.

• $tr(A \times B) = \sum_{i=1}^{p} (A \times B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} b_{k,i} \times a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} (B \times A)_{k,k} = tr(B \times A)$. ■

Remarque. On comprendra mieux plus tard l'intérêt de cette notion, à la lumière du résultat suivant : la trace est un invariant de similitude.

Proposition 22.
Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $P \in GL(p, \mathbb{K})$,
$$tr(P^{-1}AP) = tr(A).$$

Démonstration. $tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1} \times AP) \underset{(21)}{=} tr(AP \times P^{-1}) = tr(A \times I_p) = tr(A)$. ∎

3. Matrices et systèmes linéaires

3.1. Écriture matricielle d'une système linéaire.

Étant donné un système de n équations linéaires à p inconnues (avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) et à coefficients dans $\mathbb{K}$:
$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$
on pose :
$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \; ; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$
alors le produit AX est la matrice colonne :
$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$
et le système (S) est équivalent à l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:
$$(S) \iff AX = B$$

C'est l'écriture matricielle du système. La matrice A est la matrice associée au système linéaire.

Exemple.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Structure des solutions.

Définition 19. (Système homogène associé)
Étant donné le système (S) d'écriture matricielle $AX = B$, le système homogène associé est le système d'écriture matricielle $AX = O_{n,1}$, c'est à dire :
$$(S_H) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{array} \right.$$

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisque $X = O_{p,1}$ en est solution : $A \times O_{p,1} = O_{n,1}$.

Théorème 23. (Structure des solutions)
Les solutions du système (S) sont sommes d'une solution particulière de (S) et des solutions générales du système homogène associé.

Démonstration. Soit X_p une solution particulière de (S) : $A \times X_p = B$. Alors X est solution de (S) ssi :

$$AX = B \iff AX - AX_p = B - B \iff A \times (X - X_p) = O_{n,1}$$

et donc si et seulement si $(X - X_p)$ est solution du système homogène associé, c'est à dire si set seulement si X est somme de X_p et d'une solution du système homogène associé. ■

Théorème 24.
Un système linéaire admet 0, 1, ou une infinité de solutions.

Démonstration. Le système homogène associé (S_H) est compatible est admet donc au moins une solution (il suffit de considérer une matrice colonne nulle). Montrons que si (S_H) admet une deuxième solution $X_1 \neq O_{p,1}$, alors il en admet une infinité ; en effet :

$$A \times X_1 = O_{n,1} \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}, A \times (\lambda.X_1) = \lambda.(A \times X_1) = \lambda.O_{n,1} = O_{n,1}$$

ainsi chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{K}$ donne une nouvelle solution $\lambda.X_1$ de (S_H), puisque $X_1 \neq O_{p,1}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1.X_1 \neq \lambda_2.X_1$. Le système (S_H) admet donc une seule ou une infinité de solutions.
D'après le théorème précédent, si (S) admet une solution, alors il en admet une seule ou une infinité. ■

Remarque. Si l'existence de solutions dépend de B, l'unicité ne dépend que de la matrice associée au système.

3.3. Interprétation matricielle des opérations élémentaires.

La résolution d'un système linéaire s'effectue en opérant des opérations élémentaires sur les lignes du système ou simultanément sur les lignes des matrices A et B. C'est le cas dans une résolution par la méthode du pivot de Gauss.

Définition 20. (Opérations élémentaires sur les lignes)
Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dont on note les lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$; $L_i = (A_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant p}$. On considère les opérations élémentaires sur ses lignes, qui la transforment en une matrice de même type :
– $L_i \leftrightarrow L_j$ *: échange des lignes L_i et L_j.*
– $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *: multiplier la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$.*
– $L_i \leftarrow L_i + L_j$ *: ajouter la ligne L_i à la ligne L_j avec $i \neq j$.*

Proposition 25.
Appliquer à la matrice A la transformation :
• $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *revient à multiplier à gauche par :*

$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$M_n(i,\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
• $L_i \leftrightarrow L_j$ *revient à multiplier à gauche par :*

$$E_n(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$E_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

- *$L_i \leftarrow L_i + L_j$ revient à multiplier à gauche par :*

$$T_n(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$.
De plus les matrices $M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ et $T_n(i,j)$ sont inversibles.

Démonstration. (Esquisse)

- Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $M_n(i,\lambda)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{L_1} \\ \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{L_1} \\ \vdots \\ \boxed{\lambda L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_n} \end{pmatrix}$$

Ainsi lorsque $\lambda \neq 0$ appliquer à une matrice l'opération $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ suivie de l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}.L_i$ ne change rien à cette matrice. En particulier en les appliquant à la matrice identité :

$$M_n(i,\frac{1}{\lambda}) \times M_n(i,\lambda) \times I_n = I_n \implies M_n(i,\frac{1}{\lambda}) \times M_n(i,\lambda) = I_n \implies M_n(i,\frac{1}{\lambda}) = M_n(i,\lambda)^{-1}$$

Ainsi la matrice $M_n(i,\lambda)$ est inversible dès que $\lambda \neq 0$, d'inverse $M_n(i,\frac{1}{\lambda})$.

- Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $E_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer deux fois l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à une matrice A ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$E_n(i,j) \times E_n(i,j) \times I_n = I_n \implies E_n(i,j) \times E_n(i,j) = I_n \implies E_n(i,j) = E_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $E_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse elle-même.

- Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_i + L_j} \\ \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et de même multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T'_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$ à la matrice A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{L_i - L_j} \\ \vdots \\ \boxed{L_j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer à une matrice A l'opération $L_i \leftrightarrow L_i + L_j$ suivie de $L_i \leftarrow L_i - L_j$ ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$T'_n(i,j) \times T_n(i,j) \times I_n = I_n \implies T'_n(i,j) \times T_n(i,j) = I_n \implies T'_n(i,j) = T_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $T_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse $T'_n(i,j)$. ∎

Corollaire 26.
Appliquer membre à membre une opération élémentaire à une équation matricielle $AX = B$, la change en une équation équivalente (c'est à dire ayant mêmes solutions).

Démonstration. Appliquer une opération élémentaire revient à multiplier les deux membres de l'égalité par une matrice M inversible avec $M = M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. Ainsi :

$$AX = B \underset{M\times}{\Longrightarrow} MAX = MB$$

$$MAX = MB \underset{M^{-1}\times}{\Longrightarrow} M^{-1}MAX = M^{-1}MB \Longrightarrow I_nAX = I_nB \Longrightarrow AX = B$$

ainsi $AX = B \iff MAX = MB$ avec $M = M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. ■

Remarque. Ainsi, pour la résolution matricielle d'un système, effectuer une opération élémentaire simultanément sur la matrice du système et sur la matrice colonne des seconds membres transforme le système en un système équivalent.

Si la suite des opérations élémentaires s'effectue selon la méthode du pivot de Gauss, on parle de résolution (matricielle) par pivot de Gauss.

Exemple. Résolution matricielle par pivot de Gauss du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

On le retranscrit à l'aide d'une matrice 3×4 ; une ligne verticale sépare la matrice des coefficients de la matrice second membre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Définition 21. (Système de Cramer)
Un système linéaire de n équations à n inconnues est dit de Cramer si il admet une unique solution.

Théorème 27.
Un système linéaire de n équations à n inconnues est de Cramer si et seulement si sa matrice associée est inversible.
Dans ce cas, la solution du système $AX = B$ d'inconnue X est $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle du système avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si A est inversible :

$$AX = B \underset{A^{-1}\times}{\Longrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Donc il existe une unique solution.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si le système admet une solution unique, alors en appliquant le pivot de Gauss, une suite d'opérations élémentaires transforme l'équation $AX = B$ en une équation équivalente de la forme $X = C$; c'est à dire qu'appliquée à la matrice A du système cette suite d'opérations élémentaires transforme A en la matrice identité I_n et appliquée à la matrice colonne B elle la transforme en la matrice colonne C, pour finalement aboutir à l'équation $I_nX = C$. D'après la proposition 25 en considérant la suite de matrices inversibles $M_1, M_2, \dots, M_t$ correspondant à cette suite d'opérations élémentaires, on a :

$$M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n$$

Donc la matrice A est inversible et a pour inverse :

$$A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1.$$

■

Remarque. En particulier, pour un système linéaire de n équations à n inconnues, être de Cramer ne dépend que de la matrice associée au système ; ça ne dépend pas des seconds membres.

3.4. Application à l'inversion de matrice.

Le théorème précédent (théorème 27) fournit une méthode pour déterminer si une matrice A est inversible et calculer son inverse :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; posons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad ; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et considérons le système d'inconnue X et de paramètres Y :

$$(S) \quad AX = Y \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = y_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = y_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = y_n \end{array} \right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système ; on aboutit :

- *Soit à une système qui n'est pas de Cramer (lorsque le système réduit obtenu n'est pas triangulaire). Dans ce cas la matrice A n'est pas inversible.*
- *Soit à une solution unique ; dans ce cas A est inversible et :*

$$X = A^{-1}Y \quad \text{soit :} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{1n}\cdot y_n \\ x_2 = \alpha_{21}\cdot y_1 + \alpha_{22}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{2n}\cdot y_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}\cdot y_1 + \alpha_{n2}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{nn}\cdot y_n \end{array} \right.$$

Les coefficients apparaissant au second membre sont ceux de la matrice A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

• Cette méthode d'inversibilité peut aussi se retranscrire matriciellement par une méthode que certains appellent méthode miroir. On résout le système matriciellement dans une matrice $n \times 2n$:

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad I_n \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

à gauche on place la matrice A à inverser, et à droite on place la matrice identité, plutôt qu'une matrice colonne (c'est la matrice des coefficients des seconds membres $y_1, \ldots, y_n$). Puis on applique la méthode du pivot de Gauss en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à ce que la matrice de gauche soit la matrice identité, si possible.

– Si l'application du pivot de Gauss aboutit à gauche à une matrice non inversible, typiquement une matrice triangulaire ayant au moins un zéro sur sa diagonale, alors la matrice A n'est pas inversible.

– Sinon une fois abouti à la matrice identité sur la partie gauche la partie de droite est la matrice inverse recherchée :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \\ \qquad I_n \qquad\qquad\qquad\qquad A^{-1} \end{array}$$

• *Appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice :*

$$\begin{array}{c} \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad\qquad I_n \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

• *si on aboutit à :*

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right) \\ \qquad I_n \qquad\qquad\qquad\qquad A^{-1} \end{array}$$

alors A est inversible et A^{-1} apparaît dans la partie droite du tableau.
• *Si l'on ne peut pas parvenir à la matrice identité dans la partie gauche, alors A n'est pas inversible.*

Cette méthode s'interprète aussi de la manière suivante : d'après le théorème 27, A est inversible si et seulement si il existe une suite d'opérations élémentaires permettant de la transformer en la matrice identité. C'est à dire (propriété 25) s'il existe une suite de matrices d'opérations élémentaires $M_1, M_2, \dots, M_t$ telles que :

$$\begin{aligned} & M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times I_n \end{aligned}$$

et donc appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice I_n aboutit à la matrice A^{-1}.

Exercice 5. Déterminer l'inversibilité, et le cas échéant calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution.

4. Matrices blocs

Dans cette partie on considère $n \geqslant 2, p \geqslant 1, q \geqslant 1$ tels que $p+q=n$.

Définition 22. (Matrice bloc)
Soient $n \geqslant 2, p \geqslant 1, q \geqslant 1$ tels que $p+q=n$.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{p}{\longleftrightarrow} & \overset{q}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} p \updownarrow \\ q \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \end{array}$$

avec $A \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{q,q}(\mathbb{K})$.

Propriété 28. (Opérations par blocs)
Pour deux matrices par blocs de même tailles :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A+A' & B+B' \\ \hline C+C' & D+D' \end{array}\right)$$

$$\lambda \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot A & \lambda \cdot B \\ \hline \lambda \cdot C & \lambda \cdot D \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA'+BC' & AB'+BD' \\ \hline CA'+DC' & CB'+DD' \end{array}\right)$$

Démonstration. C'est trivial pour la somme et la multiplication scalaire. Pour le produit matriciel. Nommons $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ les deux matrices. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$. Supposons par exemple que $1 \leqslant i \leqslant p$ et $p+1 \leqslant j \leqslant n$ (les autres cas sont similaires).

$$\begin{aligned} (M \times M')_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \times M'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} M_{i,k} \times M'_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{n} M_{i,k} \times M'_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B'_{k,j-p} + \sum_{k=p+1}^{n} B_{i,k-p} \times D'_{k-p,j-p} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B'_{k,j-p} + \sum_{k=1}^{q} B_{i,k} \times D'_{k,j-p} \\ &= (A \times B' + B \times D')_{i,j-p} \end{aligned}$$

■

Remarque. Attention : les produits à l'intérieur ne sont pas commutatifs !

Exemple.

• L'ensemble des matrices «triangulaire supérieure par blocs» de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & D \end{array}\right)$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. Il est de dimension $n^2 - pq$.

• L'ensemble des matrices «diagonales par blocs» de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right)$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ est une sous-espace vectoriel du précédent. Il est également stable par produit et est de dimension $p^2 + q^2$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), D \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$

1) Montrer que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ est inversible et donner une expression de l'inverse

2) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et qu'alors son inverse est aussi triangulaire supérieure.

Résolution.