Chapitre 5

Séries numériques : révisions et compléments

https://www.jean-philippe-preaux.fr

Table des matières

Aspects historiques

Sommer une quantité infini de nombres ne s'est pas fait pas sans soulever quelques contre-intuitions.

On a cru un temps qu'en sommant une quantité infini de nombres positifs on obtenait une quantité infinie. C'est ce qu'illustrent les paradoxes du sophiste Zenon d'Elée (V^e siècle avant J.-C. ; la flèche qui n'atteint jamais sa cible, ou Achille qui ne rattrape jamais l'avance laissée à la tortue), prouvant selon lui l'impossibilité du mouvement. Dix siècles plus tard, Descartes y répondra, en faisant remarquer que sa sommation infinie aboutit à une somme finie revenant à considérer une durée limitée.

Aux XVII^e et XVIII^e Leibniz et Euler considéraient la somme infinie $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ pour arriver au sophisme :

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S \implies S = \frac{1}{2}$$

ou encore Euler avec :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + 2 \times (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2S \implies S = -1$$

L'étude de séries débute véritablement dans la deuxième moitié du XVII^e siècle, d'abord au sein de l'école italienne, avec la divergence de la série harmonique, et la limite de la série harmonique alternée. James Gregory découvre 40 ans avant Brook Taylor les premières séries de Taylor, dont le développement d'arctangente. Newton et Leibniz en développent l'emploi. Leonhart Euler établit très habilement de nombreuses sommes de séries dont celle des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour α pair entre 2 et 26 (dont le célèbre $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$) (malgré quelques écritures absurdes portant sur des séries divergentes, comme ci-dessus).

Il faut attendre le XIX^e siècle avec Gauss, Abel, et surtout Cauchy, pour que se clarifie la notion de convergence. Dès-lors l'étude des séries peut être fondée en toute rigueur.

1. Généralités sur les séries

1.1. Définitions.

Définition 1.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ de terme général

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$$

On appelle série de terme général u_n et on note $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$.

Une série étant une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, elle peut être convergente ou divergente.

Définition 2.
On dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ converge.
Le scalaire $\mathrm{S} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n$ est appelé somme de la série. On le note :

$$\mathrm{S} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge.

Exemples.
- La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

- La série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes } \geqslant \frac{1}{2n}} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Or, si la série convergeait vers S, $S_{2n} - S_n$ devrait tendre vers $S - S = 0$.

Définition 3.
On appelle alors reste d'ordre n le scalaire $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1.2. Résultats généraux sur la nature d'une série.

Tous les faits élémentaires suivants découlent facilement de la définition :

Proposition 1.
- *La série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ a même sommes partielles, même nature, même somme et reste éventuels que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, obtenue en posant : $\forall n \in [\![0, n_0[\![,\ u_n = 0$.*

- *On ne modifie pas la nature (i.e. la convergence ou divergence) d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes ; en revanche on modifie sa somme.*
- *Si une série converge, la suite de ses restes d'ordre n converge vers 0.*
- *Si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge vers 0 (la réciproque est fausse).*

Remarque. En particulier le dernier point est une condition nécessaire de convergence d'une série : que son terme général tende vers 0. Ainsi, toutes les séries suivantes sont divergentes :

$$\sum 1 \qquad \sum n \qquad \sum n^\alpha \text{ pour } \alpha \geqslant 0 \qquad \sum (-1)^n \qquad \sum \frac{n-1}{n}$$

Leur divergence est qualifiée de "grossière".

Définition 4. (Série grossièrement convergente)
On dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement si son terme général ne tend pas vers 0. Dans ce cas la série diverge.

Remarque. Cela n'est d'aucune utilité pour prouver la convergence d'une série. Il est courant de lire le raisonnement (faux) suivant dans les copies :

" u_n tend vers 0 donc $\sum u_n$ converge... "
Contre-exemple : $\sum \frac{1}{n}$ diverge tandis que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Exercice 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Résolution.

Comme pour les suites, et pour les mêmes raisons, la convergence d'une série à termes complexes se ramène à la convergence de deux séries à termes réels.

Théorème 2. (Convergence d'une série complexe)
Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série de terme général $u_n \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geqslant n_0} \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum_{n\geqslant n_0} \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$$

Démonstration. Découle immédiatement de la caractérisation de la convergence d'une suite complexe, en passant par les sommes partielles. ■

Théorème 3.
Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
La combinaison linéaire $\lambda \sum_{n\geqslant n_0} u_n + \mu \sum_{n\geqslant n_0} v_n$ des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est une série $\sum_{n\geqslant n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Autrement dit, l'ensemble des séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ dont le terme général est dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. C'est immédiat, par linéarité de la somme, en appliquant la définition avec les sommes partielles :

$$\lambda \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{n} v_k = \sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{(\lambda u_k + \mu v_k)}_{\in \mathbb{K}}$$

■

Bien entendu, multiplier le terme général d'une série par un scalaire non-nul ne modifie pas la nature de la série.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$; les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont même nature.

Démonstration. Les suites S_n et λS_n ont même nature lorsque $\lambda \neq 0$. ■

Mais que peut-on dire de la nature de la série d'une somme ?

Théorème 4.

- *si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge alors $\sum (u_n + v_n)$ converge*
- *si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge*

Démonstration. Le premier point s'obtient par somme des limites des sommes partielles, puisque si S_n et S'_n sont les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors par associativité et commutativité de l'addition, $S_n + S'_n$ est la somme partielle de $\sum (u_n + v_n)$.
Le même raisonnement permet de montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum u_n - v_n$ converge.
Ainsi si $\sum u_n$ converge et $\sum(u_n + v_n)$ converge alors nécessairement $\sum v_n = \sum (u_n + v_n) - u_n$ converge. Cela prouve le deuxième point par contraposée. ■

Remarques.
• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors en général ON NE PEUT RIEN DIRE sur la nature de $\sum (u_n + v_n)$; (sauf, par exemple, si les u_n et v_n sont positifs).
Exemples :
$u_n = n + \frac{1}{n}$ et $v_n = -n$: $\sum (u_n + v_n)$ diverge ; $u_n = n + \frac{1}{2^n}$ et $v_n = -n$: $\sum (u_n + v_n)$ converge
• L'ensemble des séries <u>convergentes</u> $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ de terme général dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les séries $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$; l'ensemble des séries divergentes n'est pas un sous-espace vectoriel.

Théorème 5. (Lien suites-séries)
Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$u_n - u_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

en particulier la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et la série $\sum_{n \geqslant n_0} (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature. En cas de convergence :

$$\lim u_n = u_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)$$

Démonstration. La somme télescope pour donner $\sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_{n_0}$. Le reste en découle immédiatement par somme des limites. ■

Remarque. Ce théorème est important :
– Pour déterminer la nature et somme d'une série par télecopage.
Exemple :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

– Pour déterminer la nature d'une suite, car les outils pour prouver la convergence d'une série sont beaucoup plus riches que ceux pour la convergence d'une suite, on n'hésitera donc pas à créer « artificiellement » la série des écarts à partir d'une suite

$$(u_n)_{n \geqslant n_0} \text{ converge } \iff \sum_{n \geqslant n_0} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

1.3. Séries de référence.

1.3.1. *Séries géométriques.*

Soit $q \in \mathbb{C}$, une série géométrique de raison q est une série $\sum_{n \geqslant n_0} q^n$.

La série géométrique $\sum q^n$ *a pour somme partielle d'ordre n :*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} n - n_0 + 1 & si\ q = 1 \\ \dfrac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \end{cases}$$

– *si $|q| \geqslant 1$, elle diverge grossièrement,*

– *si $|q| < 1$, elle converge et a pour somme* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Démonstration. La valeur de la somme partielle s'obtient pas somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q. Lorsque $q = 1$ la série diverge. Lorsque $q \neq 1$ la convergence de la série équivaut à celle de la suite géométrique de raison q qui a lieu (pour $q \neq 1$) ssi $|q| < 1$. Dans ce cas $q^{n+1} \longrightarrow 0$; d'où la valeur de la somme. ■

Exercice 2.
a) Déterminer le reste d'ordre n d'une série géométrique $\sum q^n$ avec $|q| < 1$.

b) Écrire sous forme exponentielle le reste d'ordre n lorsque $q = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

Résolution.

1.3.2. *Séries de Riemann.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est appelée <u>série de Riemann</u>.*

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si $\alpha > 1$*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la suite des sommes partielles est croissante puisque le terme général est positif.
1[er] *cas :* $\alpha > 1$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $\forall t \in [n-1, n]$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$, d'où $\dfrac{1}{n^\alpha} = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, d'où pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

La suite (S_n) est croissante et majorée et donc convergente : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

2[me] *cas :* $\alpha \leqslant 1$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$, et $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{t}$ d'où $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, on en déduit :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$: $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge. ■

Exemple. A connaître : estimer le reste R_n de la série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$:

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante donc :

$$\forall t \in [n-1, n],\ \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \implies \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\implies R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi : $R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. (Remarque : en minorant R_n par la même méthode on obtient même l'équivalent).

La série divergente $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.

1.3.3. *Série harmonique alternée.*

La série harmonique alternée est $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

La série harmonique alternée est convergente, de somme $-\ln(2)$.

En effet : utilisons la formule $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\ .
\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Remarque. La convergence de cette série est très lente (de l'ordre de $\frac{1}{n}$), on préférera la formule suivante pour le calcul de $\ln 2$:

$$\ln 2 = -\ln\frac{1}{2} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{1}{2^n} + \cdots$$

lorsqu'on aura vu le développement en séries entières de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Une autre série alternée classique :

Exercice 3. Intégrer terme à terme sur $[0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k = \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}$ pour en déduire la somme de la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Résolution.

1.3.4. *Série exponentielle.*

La série exponentielle est celle dont la somme partielle d'ordre n est le polynôme de Taylor d'ordre n de $\exp(x)$ en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$; la série exponentielle est :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle converge et :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Démonstration. La somme partielle d'ordre n est le polynôme de Taylor du $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $I = [-|x|, |x|]$, on a :

$$\max_{t\in I} \left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = \exp(|x|)$$

donc :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \exp(|x|) \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Posons $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier en posant $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour $n \gg 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$ et donc $u_n = O(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. (On pourrait aussi appliquer la croissance comparée des suites géométrique et factorielle).

Ainsi :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

■

1.3.5. *Séries circulaires* cos *et* sin.

Le même argument s'applique pour les séries polynômes de Taylor de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

converge et :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Démonstration. La somme partielle d'ordre n est le polynôme de Taylor du $DL_{2n}(0)$ de la fonction cos. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $I = [-|x|, |x|]$, on a :

$$\max_{t\in I} \left|\cos^{(2n+1)}(t)\right| = \max_{t\in I} \left|\cos\left(t + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$$

donc :

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant 1 \times \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Posons $u_n = \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier en posant $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, pour $n \gg 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$ et donc $u_n = O(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et donc,} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(x).$$

■

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

converge et :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Démonstration. La somme partielle d'ordre n est le polynôme de Taylor du $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction sin. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $I = [-|x|, |x|]$, on a :

$$\max_{t\in I} \left|\sin^{(2n+2)}(t)\right| = \max_{t\in I} \left|\sin\left(t + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$$

donc :

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant 1 \times \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Posons $u_n = \dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|^2}{(2n+4)(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier en posant $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, pour $n \gg 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$ et donc $u_n = O(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et donc,} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(x).$$

■

2. Séries à termes positifs

Dans cette partie toutes les séries sont supposées à termes positifs à partir d'un certain rang. Comme pour les intégrales impropres, nous étudions la nature d'une série sans passer par les sommes partielles mais par propriété du terme général.

2.1. Critère de convergence.

Théorème 6. (Critère de convergence)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs. Elle converge si et seulement si $\left\{\sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N}\right\}$ est majoré. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Démonstration. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (à partir d'un certain rang), et d'après le théorème de la limite monotone elle converge ssi elle est majorée ; dans ce cas sa limite est la borne supérieure de $\left\{S_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\right\}$. ■

2.2. Comparaisons de séries.

Théorème 7. (de comparaison)

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \textit{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \textit{ converge} \left(\textit{et} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \textit{ diverge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \textit{ diverge}$$

Démonstration. Découle du critère de convergence, car si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$:

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} v_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ majoré } \implies \left\{\sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ majoré}$$
$$\left\{\sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ non majoré } \implies \left\{\sum_{k=0}^{n} v_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ non majoré}$$

■

Remarque. Puisque la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, le théorème demeure vrai lorsque $u_n \leqslant v_n$ seulement à partir d'un certain rang.

La condition $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, peut être remplacée par l'hypothèse plus faible : il existe $K > 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant K.v_n$, c'est-à-dire lorsque (u_n) et (v_n) sont à termes positifs, par $u_n = O(v_n)$:

Théorème 8. (de comparaison en O)
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries à termes positifs telle que* $u_n = O(v_n)$ *alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \textit{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \textit{ converge}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \textit{ diverge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \textit{ diverge}$$

Démonstration. Elle est presque identique, puisque pour tout $K > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ est majoré } \iff \left\{\sum_{k=n_0}^{n} K.u_k, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ est majoré}$$

■

Remarque. Pour appliquer ce résultat, on pourra se rappeller (cf. Chapitre 1) que

$$\left(\forall n \gg 0,\ u_n, v_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \implies u_n = O(v_n).$$

Exemple. Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ lorsque $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha \neq 1$.

– Si $\alpha > 1$, alors à partir d'un certain rang $n^\alpha \ln^\beta(n) \geqslant n^\alpha$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \leqslant \sum \frac{1}{n^\alpha}$ donc la série converge par comparaison avec une série de Riemann.

– Si $\alpha < 1$, alors $\frac{n}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \longrightarrow +\infty \implies \frac{n^\alpha \ln^\beta(n)}{n} \longrightarrow 0 \implies \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$. Ainsi la série diverge.
(Le cas $\alpha = 1$ est traité plus loin en exercice).

Corollaire 9. ($u_n \sim v_n \geqslant 0 \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature)
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries à termes positifs.*

Si $u_n \sim v_n$ *alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *ont même nature.*

Démonstration. Lorsque $u_n \sim v_n$ on a à la fois $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. On peut donc appliquer le théorème de comparaison en O. ■

Notamment, on pourra utiliser l'équivalent suivant de $n!$:

Formule de Stirling.
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration. non exigible ; voir preuve en DM. ■

2.3. Critères de convergence.

Appliquons le théorème de comparaison en O en comparant avec les séries de référence.

En comparant avec une série géométrique on obtient la règle de d'Alembert :

Théorème 10. (Règle de d'Alembert)
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série à termes strictement positifs tel que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. *Alors :*
$$\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}$$
$$\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge}$$
si $\ell = 1$, *on ne peut rien dire ("cas douteux")*

Démonstration. Soit (u_n) à termes positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Si $\ell < 1$ alors à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$ (car en appliquant la définition avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} = q < 1$). En considérant la suite géométrique de terme général, $v_n = q^n$, on obtient $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et donc $u_n = O(v_n)$. Puisque $\sum v_n$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge aussi.
Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$ alors à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q > 1$ (car en appliquant la définition, c'est immédiat si $\ell = +\infty$, et pour $\ell \in]1, +\infty[$, avec $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2} > 0$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} = q > 1$). En considérant la suite géométrique de terme général, $v_n = q^n$, on obtient $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et donc $v_n = O(u_n)$. Puisque $\sum v_n$ diverge, par comparaison, $\sum u_n$ diverge aussi. ■

Pour les exercices, voici une variante un peu plus générale (rappelons que pour une série quelconque, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe pas toujours !) :

Proposition 11.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

- *Si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$ *à partir d'un certain rang alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*
- *Si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ *à partir d'un certain rang alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge grossièrement.*

Démonstration. Si pour $n \gg 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$, le même argument que dans la preuve précédente s'applique pour montrer que $\sum u_n$ converge.
Si pour $n \gg 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors par télescopage :
$$u_n = u_{n_0} \times \underbrace{\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}}_{\geqslant 1} \geqslant u_{n_0} > 0$$
En particulier (u_n) ne tend pas vers 0. ■

Très prisée des élèves, la règle de d'Alembert est rarement utile (sauf quand on a des factorielles et/ou des puissances), $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas simple et tend souvent vers 1. Dans ce dernier cas, on peut effectuer un développement asymptotique (méthode de Raabe-Duhamel, voir exercices).

Exercice 4. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n} a^n$ $(a > 0)$.

Résolution.

En comparant avec les séries de Riemann, on obtient la règle de Riemann ; c'est un énoncé qui n'est pas officiellement au programme ! Aussi on a ajouté une justification ($\sim$, o, O) qui permet de l'appliquer sans le citer.

Théorème 12. (Règle de Riemann)
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série à termes positifs tel que* $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. *Alors :*

- *Si* $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ *donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge* $\iff \alpha > 1$.
- *Si* $\ell = 0$ *alors* $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *et donc* $\alpha > 1 \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*
- *Si* $\ell = +\infty$ *alors* $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ *et donc* $\alpha \leqslant 1 \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge.*

Démonstration. On applique les théorèmes de comparaison en O ou $\sim$. La justification à l'aide des comparaisons $\sim$, o est donnée par l'énoncé. On se rappelle que $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$. ∎

Remarque. S'applique en donnant les justifications en $\sim$, o données dans l'énoncé. L'application nécessite de choisir α de manière appropriée.

Quelques exemples en exercice à connaître :

Exercice 5. Étudier la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$.

Résolution.

Exercice 6. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(\ln n)\sin(1/n)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Résolution.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^\alpha}$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α.

Résolution.

2.4. **Comparaison série-intégrale.**

Théorème 13. (comparaison série-intégrale)

Soit $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et décroissante.
La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant n_0+1}\left(\int_{k-1}^{k} f - f(k)\right)$ est convergente.
En particulier, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n_0} f(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ sont de même nature.

Démonstration. On a pour tout $k \geqslant n_0+1$, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x \in [k-1, k],\ f(x) \leqslant f(k-1) \implies \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\mathrm{d}x = f(k-1),\ \text{et}$$

$$\int_{k-1}^{k} f(k) = f(k)$$

donc :

$$0 \leqslant \int_{k-1}^{k} f - f(k) \leqslant f(k-1) - f(k)$$

Par sommation et télescopage :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f - f(k)\right) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n}\left(f(k-1) - f(k)\right) = f(n_0) - f(n) \leqslant f(n_0),$$

la somme partielle de la série est donc majorée par $f(n_0)$. Puisqu'elle est à valeurs positives, elle est aussi croissante, et donc convergente vers une limite finie L. Cela montre le premier point.

Ainsi
$$\sum_{k=n_0+1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f - f(k)\right) = \int_{n_0}^{n} f - \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = L + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge alors la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f\right)_{n\geqslant n_0}$ converge et il en va de même de la série $\sum_{k\geqslant n_0+1} f(k)$.

Si la série $\sum_{k\geqslant n_0+1} f(k)$ converge alors la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\mathrm{L} = L + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$; il reste à montrer que $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge. Par positivité de f, pour tout $A \in [n_0, +\infty[$: $\lfloor A\rfloor \leqslant A < \lfloor A\rfloor + 1 \implies 0 \leqslant \int_{n_0}^{\lfloor A\rfloor} f \leqslant \int_{n_0}^{A} f \leqslant \int_{n_0}^{\lfloor A\rfloor+1} f \leqslant \mathrm{L}$ or par théorème de composition des limites $\int_{n_0}^{\lfloor A\rfloor} f \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L}$ et donc $\int_{n_0}^{A} f \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L}$; autrement dit l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge.

■

Remarque. En cas de divergence, on peut préciser qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell = -L$ dans la preuve) tel que :
$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = \int_{n_0}^{n} f + \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \quad \text{et en particulier} \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n} f\ .$$

Proposition 14.
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et décroissante.
Si la série $\sum_{k\geqslant n_0+1} f(k)$ diverge, alors elle admet pour équivalent :
$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n} f$$
et il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que :
$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_{n_0}^{n} f \ + \ \ell + o(1)\ .$$

Exercice 8.
Montrer par comparaison avec une intégrale l'équivalent de la série harmonique :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$
et qu'il existe une constante γ appelée constante d'Euler telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$(on a $\gamma \approx 0,577$)

Résolution.

Exercice 9. Étudier la nature des séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ lorsque $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

Résolution.

3. Séries à termes quelconques ($u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

3.1. **Convergence absolue.**

Définition 5.
On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est* <u>*absolument convergente*</u> *lorsque* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ *est un série convergente.*

Comme pour les intégrales impropres, on dispose du très important résultat suivant ; c'est une condition suffisante non nécessaire de convergence :

Théorème 15. (CVA $\implies$ CV)
L'absolue convergence entraine la convergence et de plus :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \textit{(inégalité triangulaire)}$$

Démonstration.

– Cas réel : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Notons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ alors $u_n = u_n^+ - u_n^-$et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

Puisque $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ est convergente, et de même pour $\sum u_n^-$ donc $\sum u_n$ est convergente et $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$.

– Cas complexe : $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On écrit $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u_n)$; en utilisant $|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$, on en déduit la convergence absolue de $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$, et donc avec ce qui précède, leur convergence ; ainsi $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \sum \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i}\sum \mathrm{Im}(u_n)$.

Finalement, de l'inégalité triangulaire sur les sommes (finies) on déduit par passage à la limite l'inégalité triangulaire sur les séries absolument convergentes :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

■

Remarque. La réciproque est fausse, il existe des séries convergentes non absolument convergente (on parle de séries semi-convergentes), par exemple $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$(de somme $\ln 2$).

Théorème 16.
Soient (u_n) une suite à valeurs complexes, et (v_n) une suite à valeurs réelles et positives. Alors :
$$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Démonstration. Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe une constante $K > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant K.|v_n|$; ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge. ■

Corollaire 17.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs complexes.
- *Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et si $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Le premier point découle immédiatement du théorème précédent, les deux suivants en découlent. ■

Remarque. Attention, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge n'implique pas que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, l'hypothèse que v_n ne change pas de signe à partir d'un certian rang est essentielle (erreur très classique). Un contre-exemple est donné par $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (on pourra le justifier simplement après le prochain paragraphe).

3.2. Séries alternées.

Définition 6.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série alternée ssi $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n u_n$ est de signe constant.

Une série alterné est une série dont le terme général change de signe à chaque rang.

Théorème 18. (Critère spécial des séries alternées (CSSA))
Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ alternée vérifie le critère spécial des séries alternées lorsque :
la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite 0.
Dans ce cas, la série est convergente.
De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe de son premier terme u_0 et est en valeur absolue $\leqslant |u_0|$; appliqué au reste, il en découle :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ est du signe de } u_{n+1} \text{ et est en valeur absolue } \leqslant |u_{n+1}|$$

Démonstration. On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; soit $e \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (-1)^{n+e}|u_n|$ (i.e. $(-1)^e$ et u_0 sont de même signe) ;
$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^e(|u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|) \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^e(|u_{2n+2}| - |u_{2n+3}|)$$
ainsi (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites de monotonie contraire. De plus $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \longrightarrow 0$; donc les suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite ℓ, et donc (S_n) aussi. En particulier pour tout $N \in \mathbb{N}$, en posant $sgn(u_{N+1}) = (-1)^{N+1+e} = \pm 1$ (du même signe que u_{N+1}) :
$$sgn(u_{N+1}) \times \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant sgn(u_{N+1}) \times \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant sgn(u_{N+1}) \times \sum_{n=0}^{N+1} u_n$$
$$\Longrightarrow 0 \leqslant sgn(u_{N+1}) \times \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leqslant sgn(u_{N+1}) \times u_{N+1}$$
Ainsi R_N est du même signe que u_{N+1} et $|R_N| \leqslant |u_{N+1}|$. ■

Exemple. La série alternée $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ vérifie le critère spécial des séries alternées ; ainsi les suites $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont équivalentes mais donnent des séries qui n'ont pas même nature.

Remarque. Bien sûr, le résultat de la convergence reste vrai si on a $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang mais la majoration de la somme est fausse (il faut décaler les termes).

Exercice 10. Déterminer la nature de :

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \alpha>0$
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$

Résolution.

Méthode pour l'étude d'une série à terme quelconque.

– En général, on étudie $|u_n|$ (majoration ou minoration et équivalent). Si on a CVA, alors on a CV.

– si $\sum |u_n|$ diverge :

- On peut se demander si l'on a affaire à une série alternée (c'est souvent visible !) qui vérifie le critère spécial à partir d'un certain rang.
  Par exemple si $u_n=(-1)^n f(n)$, on peut regarder le signe de $f'(x)$ lorsque x tend $+\infty$.
- On peut effectuer un développement asymptotique, jusqu'a un terme de signe constant ou de convergence absolue ; typiquement :
  si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, on ne peut pas conclure mais si on prouve par exemple que
  $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+\frac{5}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors on sait conclure...
- Il arrive qu'un groupement de termes donne des résultats : étudier $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos\left((3n+1)\frac{2\pi}{3}\right)}{3n+1}+\frac{\cos\left((3n+2)\frac{2\pi}{3}\right)}{3n+2}+\frac{\cos\left((3n+3)\frac{2\pi}{3}\right)}{3n+3}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-\frac{1}{2}}{3n+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\frac{-3n-3}{2(3n+1)(3n+2)(3n+3)}}_{\sim -\frac{1}{18n^2}}
\end{aligned}$$

La série S_{3n} converge par comparaison avec une série de Riemann et $S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{-\frac{1}{2}}{3n+1} = S_{3n} + o(1)$ et $S_{3n+2} = S_{3n} + \frac{-\frac{1}{2}}{3n+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{3n+2} = S_{3n} + o(1)$ convergent vers la même limite ; d'où la convergence.

Remarque. Retenir que regrouper par paquet revient à extraire une suite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles.

3.3. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

DÉFINITION 7.
On appelle produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ la série de terme général w_n défini par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

Remarque. Si l'on constitue un tableau en plaçant en ligne u_i, en colonne v_j et au croisement dans le tableau leur produit $u_i v_j$, l'élément w_n est obtenu en sommant les éléments du tableau sur la diagonale $i + j = n$:

$$w_0 = u_0 v_0 \qquad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 \qquad w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 \qquad \text{etc.}$$

Le résultat fondamental est que pour deux séries absolument convergente, leur produit de Cauchy converge absolument vers le produit de leur somme.

THÉORÈME 19. (Produit de Cauchy de séries ACV)
Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est aussi absolument convergent et

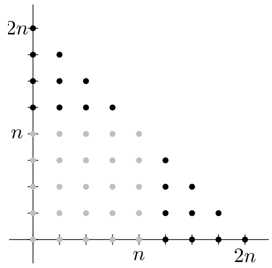
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration. Non exigible. (S'aider d'une figure.)
Etablissons d'abord la convergence absolue de $\sum w_n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} |w_i| &= \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{i} u_k v_{i-k} \right| & \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} |u_k v_{i-k}| & \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |u_i|\,|v_j| & \text{par positivité} \\
&= \sum_{i=0}^{n} |u_i| \times \sum_{j=0}^{n} |v_j| & \text{par linéarité}
\end{aligned}$$

La convergence absolue des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ assure alors de la converge absolue du produit de Cauchy.
Notons U_n, V_n, W_n les sommes partielles des séries de terme général, respectivement u_n, v_n, w_n.

$$\begin{aligned}
U_n \times V_n &= \sum_{i=0}^{n} u_i \times \sum_{j=0}^{n} v_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_i \times v_j \\
W_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} u_i v_j \\
\Longrightarrow W_{2n} - U_n \times V_n &= \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} u_i v_j + \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=0}^{2n-j} u_i v_j \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} u_i \sum_{j=0}^{2n-i} v_j + \sum_{j=n+1}^{2n} v_j \sum_{i=0}^{2n-j} u_i
\end{aligned}$$



Puisque les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, elles sont bornées : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leqslant M$$

En particulier, en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|W_{2n} - U_n \times V_n| &\leqslant \left|\sum_{i=n+1}^{2n} u_i \sum_{j=0}^{2n-i} v_j\right| + \left|\sum_{j=n+1}^{2n} v_j \sum_{i=0}^{2n-j} u_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n+1}^{2n} \left|u_i \sum_{j=0}^{2n-i} v_j\right| + \sum_{j=n+1}^{2n} \left|v_j \sum_{i=0}^{2n-j} u_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n+1}^{2n} |u_i| \left|\sum_{j=0}^{2n-i} v_j\right| + \sum_{j=n+1}^{2n} |v_j| \left|\sum_{i=0}^{2n-j} u_i\right| \\
&\leqslant M \times \sum_{i=n+1}^{2n} |u_i| + M \times \sum_{j=n+1}^{2n} |v_j|
\end{aligned}$$

Or les séries étant absolument convergente, les suites des restes $\sum_{i=n+1}^{+\infty} |u_i|$ et $\sum_{j=n+1}^{+\infty} |v_j|$ tendent vers 0 ; donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \implies \begin{cases} \sum_{i=n+1}^{2n} |u_i| \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} |u_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \\ \sum_{j=n+1}^{2n} |v_j| \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} |v_j| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases} \implies |W_{2n} - U_n \times V_n| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Ainsi, par définition, $|W_{2n} - U_n V_n| \longrightarrow 0$. En passant à la limite, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

Remarque. Attention sans la convergence absolue, tout peut se produire ; on ne peut rien déduire sur la nature du produit de Cauchy.

Exercice 11.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série réelle absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

En utilisant le produit de Cauchy, montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge absolument et exprimer sa somme en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Résolution.

3.4. **Exemple : La série exponentielle.**

On a établi que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sont absolument convergentes, et donc convergentes.

Pour $z \in \mathbb{C}$, notons (pour l'instant) $\mathbf{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(\theta)^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow}\ & \mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \end{aligned}$$

D'autre part, soient a et b deux complexes, par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^b &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} (a+b)^n && \text{formule du binôme} \\ &= \mathbf{e}^{a+b} \end{aligned}$$

En particulier, $\mathbf{e}^{a+\mathrm{i}b} = \mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^{\mathrm{i}b}$; c'est l'exponentielle complexe comme elle a pu être définie en début de sup. Désormais on notera e^z.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série absolument convergente :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$$

permet d'étendre la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. On note sa somme e^z. Elle vérifie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a+\mathrm{i}b} = e^a \times (\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b))$$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

3.5. **Approximation numérique d'une somme.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente. On sait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On se donne $\varepsilon = 10^{-p}$ par exemple, et on cherche un $N \in \mathbb{N}$ (pas trop grand si possible) tel que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_N \right| = \left| \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \varepsilon.$$

S_N sera alors une valeur approchée de la somme S. Il est donc intéressant de savoir majorer sans symbole somme le reste de la série étudiée. Voici quelques exemples classiques.

- Majoration classique lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant k\,|u_n|$ avec $k \in]0,1[$. Alors :

$$|R_N| \leqslant |u_{N+1}| \left(1 + k + k^2 + \cdots\right) = \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$$

- Pour les séries de Riemann convergentes ($\alpha > 1$), on sait que

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

- Autre exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} &\leqslant \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \cdots\right) \\ &\leqslant \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \cdots\right)}_{\text{série géométrique}} \\ &\leqslant \frac{1}{(N+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{N+2}} = \frac{N+2}{(N+1)(N+1)!}. \end{aligned}$$

Il est alors facile de trouver un entier N tel que $\dfrac{N+2}{(N+1)(N+1)!} \leqslant \varepsilon$.

- Comme pour les séries de Riemann, on peut penser à comparer la série avec une intégrale (surtout si la fonction est décroissante) : sous cette hypothèse $0 \leqslant R_{\mathrm{N}+1} = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_N^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ avec f positive décroissante. Si l'intégrale se calcule facilement, on peut facilement récupérer un entier N satisfaisant $\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \varepsilon$.

4. Quelques exercices

Exercice 12. Critère de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive.

1) On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$.
À quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ?
Indication : considérer $\sum_{n\geqslant 1} (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ *avec* $v_n = n^\alpha u_n$.
2) On suppose seulement $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
Indication : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *à* $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ *pour* $w_n = \frac{1}{n^\gamma}, \gamma$ *bien choisi.*

Résolution.

Remarque. Ce critère s'applique seulement lorsque d'Alembert échoue avec $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^-$.

Exercice 13. (Mines 2018).
On dispose d'une suite (u_n) à termes strictement positifs.
Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n}\right).$$

(1) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. La suite (x_n) converge-t-elle ?
(2) On suppose que la suite (x_n) admet une limite finie. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge-t-elle ?

Résolution.

Exercice 14. (Mines 2018).
Déterminer la nature de :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(2-\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)$$

Indication : remarquer que $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}=\displaystyle\int_0^1(-t)^{k-1}\mathrm{d}t$.

Résolution.