

Chapitre 4

Intégrales généralisées

<https://www.jean-philippe-preaux.fr>

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Intégrale impropre convergente	2
1.1. Intégrale impropre en une borne	2
1.2. Intégrale impropre aux deux bornes	2
1.3. Exemples	3
2. Propriétés	5
3. Cas des fonctions à valeurs positives	6
3.1. Caractérisation de la convergence	6
3.2. Théorèmes de comparaison	6
4. Intégrabilité	8
4.1. Convergence absolue	8
4.2. Fonctions de référence	9
4.3. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable sur $[a, +\infty[$	11
4.4. Intégrales semi-convergentes	11
5. Calcul d'intégrale généralisée	12
5.1. Changement de variable	13
5.2. Intégration par partie	14

INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'étendre la théorie de l'intégration sur un segment à un intervalle quelconque $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$ avec éventuellement a ou b infini.

Toutes les fonctions envisagées dans ce chapitre seront supposées continues par morceaux sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes.

On rencontre des intégrales sur un intervalle quelconque :

- en MÉCANIQUE. La période d'un pendule circulaire de longueur ℓ dépend de l'amplitude θ_0 ($0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$) suivant la formule :

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

- en ÉLECTROSTATIQUE - dans des modèles théoriques. Le champ produit par une tige uniformément chargée en un point distant de $a > 0$ est donné par la formule :

$$E = \frac{a\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)^3}}.$$

- en SCIENCES INDUSTRIELLES. On applique une charge constante à un amortisseur pneumatique. Le temps de compression isotherme s'écrit à un facteur près :

$$I = \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{\frac{h}{h - h_0}} dh \text{ avec } h_1 > h_0$$

1. INTÉGRALE IMPROPRE CONVERGENTE

1.1. Intégrale impropre en une borne.

DÉFINITION 1. (Intégrale impropre sur $[a, b[$)

Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, et f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes définie sur $[a, b[$.

L'intégrale (dite impropre ou généralisée) $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente lorsque la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } b$$

On pose alors $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$

Une intégrale non convergente est appelée divergente.

Par symétrie, pour la borne de gauche.

DÉFINITION 2. (Intégrale impropre sur $]a, b]$)

Soit $-\infty \leq a < b < +\infty$, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$; l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$

est convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .

On pose alors $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f$

1.2. Intégrale impropre aux deux bornes.

Pour finir, lorsque les deux bornes sont exclues.

PROPOSITION-DÉFINITION 3. (Intégrale impropre sur $]a, b[$)

- Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales impropres

$\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ soient convergentes. On pose alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f + \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- S'il existe un $c \in]a, b[$ telles que les intégrales sont convergentes alors ce sera également vrai pour n'importe quel autre c choisi dans $]a, b[$ et la valeur de $\int_a^b f$ est inchangée.

Autrement dit, on peut découper indifféremment l'intervalle $]a, b[$; seul compte le comportement de la fonction f au voisinage des bornes a et b .

Démonstration. Soit en effet $c, c' \in]a, b[$ alors, par la relation de Chasles sur les intégrales sur un segment :

$$\int_x^c f = \int_x^{c'} f + \int_{c'}^c f \text{ donc la convergence de } \left(\int_x^c f\right) \text{ équivaut à celle de } \left(\int_x^{c'} f\right) \text{ et on a}$$

$$\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f, \text{ de même } \int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f, \text{ d'où le résultat, puisque } \int_{c'}^c f = -\int_c^{c'} f. \quad \blacksquare$$

Remarque. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$.

DÉFINITION 4. (Intégrale divergente ; nature d'une intégrale)

- Dans chacun des cas contraires, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite divergente.
- Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque. C'est le comportement de f au voisinage de a et/ou de b qui est important pour déterminer la nature de l'intégrale car pour $a < c \leq c' < b$, l'intégrale sur le segment $[c, c']$, $\int_c^{c'} f$ est un scalaire bien défini.

1.3. Exemples.

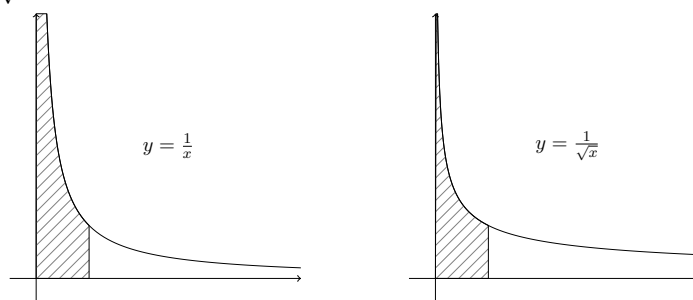
Exercice 1. Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} ; \int_0^1 \frac{dt}{t} ; \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} ; \int_0^{+\infty} \sin(t)dt \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Résolution.

Exemple. L'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$ est :

- infinie pour $f(x) = \frac{1}{x}$,
- finie pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



Dans le cas d'une fonction prolongeable par continuité au niveau de la borne exclue, la convergence est facile à établir et relève de l'intégration sur un segment.

THÉORÈME 1. (Intégrale faussement impropre)

Soit f continue sur $[a, b[$ avec b finie. On suppose que f peut être prolongée en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et coïncide avec $\int_{[a,b]} \tilde{f}$ (intégration sur un segment). On dit parfois que l'intégrale est faussement impropre en b .

Exemple. $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt, \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$

Remarques.

- Bien sûr, on dispose du même résultat pour les intervalles $]a, b]$ avec $a > -\infty$.
- En conséquence, lorsque, par exemple, $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a, b], \mathbb{K})$, on peut considérer indifféremment l'intégrale de f sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$, elles sont de même nature et de même valeur.

COROLLAIRE 2. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f$$

DÉFINITION 5. (Extension de la définition)

Lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, on posera $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.
(et on dira également que l'intégrale $\int_b^a f(t)dt$ est convergente)

Exemples. Intégrales de référence.

- $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente et $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

$$\int_a^1 \ln(t)dt = \left[t \ln(t) - t \right]_a^1 = -a \ln(a) + a - 1 \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} -1$$

- Soit $\alpha > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$. (Intégrale de Riemann en 0).

En effet, soit $x \in]0, 1]$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_x^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln(t) \right]_x^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Exemple type : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 = 2$.

- En corollaire, soit $\alpha > 0$, et $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$:

$\int_a^{t_0} \frac{1}{(t-t_0)^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$. (Intégrale de Riemann en une borne finie).

Il suffit d'effectuer le même calcul en procédant au changement de variable $t' = t - t_0$.

Exemple type : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^1 = 2$.

- Soit $\alpha > 0$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$. (Intégrale de Riemann en $+\infty$).

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln(t) \right]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Exemple-type : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{+\infty} = 1$.

- Soit $\alpha > 0$; $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

En effet :

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$$

Remarque. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge !

2. PROPRIÉTÉS

On étend dans cette partie les propriétés des intégrales aux intégrales impropres. Dans toute cette partie a, b, c désignent des éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g des fonctions continues par morceaux. La relation de Chasles s'étend immédiatement.

PROPRIÉTÉ 3. (Relation de Chasles)

Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^c f(t)dt$ sont convergentes alors l'intégrale $\int_a^c f(t)dt$ est convergente et :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Démonstration. Lorsque $a \leq b \leq c$, il suffit d'appliquer la relation de Chasles sur un segment où f et g sont continues par morceaux, $[x, b]$ et $[b, y]$, puis de faire tendre $x \rightarrow a^\pm$ et $y \rightarrow c^\mp$ et de conclure par somme des limites. Dans les cas restants inverser les bornes en changeant l'intégrale en son opposé permet de se ramener à un cas analogue. ■

PROPRIÉTÉ 4. (Linéarité)

Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b \lambda f + \mu g$ converge et

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, $\int_a^b \lambda f + \mu g$ diverge.

Démonstration. Lorsque $a \leq b$, il suffit d'appliquer la linéarité sur un segment où f et g sont continues par morceaux, $[a, x]$ ou $[y, b]$ ou $[y, c]$ et $[c, x]$, puis de faire tendre $x \rightarrow b^-$ et $y \rightarrow a^+$ et de conclure par combinaison linéaire des limites. Dans le cas restant on procède de même après avoir inversé les bornes. ■

PROPRIÉTÉ 5. (Positivité)

Si f est à valeurs positives sur $]a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration. Par positivité de l'intégrale sur un segment, sous ces hypothèses, pour tout segment $[x, y] \subset]a, b[$, $\int_x^y f \geq 0$. Par passage à la limite lorsque $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow b$, on a alors $\int_a^b f \geq 0$. ■

PROPRIÉTÉ 6. (Croissance)

Si sur l'intervalle $]a, b[$, $f \leq g$ et si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Démonstration. Sous ces hypothèses $g - f \geq 0$ sur $]a, b[$; par linéarité $\int_a^b g - f$ converge et $\int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$ par positivité. ■

Dans le cas particulier d'une fonction continue (et non plus seulement continue par morceaux) :

PROPRIÉTÉ 7.

Soit f une application continue et positive sur un intervalle I , et telle que $\int_I f$ converge. Alors :

$$\int_I f = 0 \implies f = 0.$$

Démonstration. Elle est identique à celle dans le cas d'une intégrale sur un segment : on montre la contraposée. Si f n'est pas identiquement nulle, il existe $a \in I$ tel que $f(a) > 0$; mais par continuité f est alors minorée par $m > 0$ sur un voisinage $]a_0, a_1[$ de a dans I (avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $a_0 < a_1$). En appliquant la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale on obtient alors $\int_I f \geq \int_{a_0}^{a_1} f \geq m \times (a_1 - a_0) > 0$. ■

3. CAS DES FONCTIONS À VALEURS POSITIVES

Considérons le cas des fonctions à valeurs réelles positives. Dans cette partie toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

3.1. Caractérisation de la convergence.

THÉORÈME 8.

Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$, et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux ; alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction croissante $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Démonstration. L'application f étant positive, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante ; d'après le théorème de la limite monotone $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$ existe, et elle est finie (c'est à dire $\int_a^b f$ converge) ssi $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée. ■

3.2. Théorèmes de comparaison.

THÉORÈME 9. (Théorème de comparaison pour les fonctions positives I)

Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$, $I = [a, b[$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que :

$$f \leq g$$

alors :

- Si $\int_a^b g$ est convergente alors $\int_a^b f$ est convergente, et de plus $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Si $\int_a^b f$ est divergente alors $\int_a^b g$ est divergente.

Démonstration. Pour la première implication : par croissance de l'intégrale (sur un segment), pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x f \leq \int_a^x g$; si $\int_a^b g$ converge, d'après le théorème 8, $x \mapsto \int_a^x g$ est majorée, donc $x \mapsto \int_a^x f$ aussi et $\int_a^b f$ converge. Quand à la deuxième implication, c'est la contraposée de la première. ■

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2 - \cos t}{t} dt$.

Résolution.

Le théorème 9 se généralise aux relation de comparaisons $f = o(g)$, $f = O(g)$, $f \sim g$:

THÉORÈME 10. (Théorème de comparaison pour les fonctions positives II)

Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$, et $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux.

- Si (au choix) :

$$f \underset{b^-}{=} O(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{b^-}{=} o(g)$$

alors :

– si $\int_a^b g$ est convergente alors $\int_a^b f$ est convergente ;

– si $\int_a^b f$ est divergente alors $\int_a^b g$ est divergente.

- Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\int_a^b g$ est convergente (i.e. les intégrales sont de même nature).

Démonstration. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et $g \underset{b^-}{=} O(f)$; aussi le deuxième point découle du premier.

Pour montrer le premier point : si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ alors $f \underset{b^-}{=} O(g)$, aussi supposons sans perte de généralité que $f \underset{b^-}{=} O(g)$. Par définition il existe $a_0 \in [a, b[$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in [a_0, b[, f(x) \leq K \cdot g(x)$. Ainsi par linéarité de l'intégrale (propriété 4) et d'après le théorème 9, si $\int_{a_0}^b g$ converge, alors $\int_{a_0}^b f$ aussi. Avec la relation de Chasles (propriété 3), si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ aussi. L'implication restante est la contraposée de celle que l'on vient d'établir. ■

Remarques.

- Les mêmes théorèmes s'appliquent sans difficulté pour les applications positives de $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}^+)$.
- Pour les applications de $\mathcal{C}_{pm}([a, b[, \mathbb{R}^+)$, on étudiera séparément les comportements en a et en b . On rappelle que pour étudier la convergence de l'intégrale, c'est le comportement local au voisinage des bornes qu'il faut étudier (une fois établie le caractère continu par morceaux de la fonction).
- Le résultat peut encore se renforcer en ne supposant la positivité des fonctions et leur comparaison que sur un voisinage de b (ou de la borne problématique) ; pour cela il suffit d'appliquer la relation de Chasles.
- Lorsque les fonctions sont à valeurs négatives, le résultat reste vrai après inversion des relations de comparaison ; le mieux est peut-être d'appliquer le résultat aux fonctions opposées $-f$ et $-g$ et la linéarité de l'intégrale.

Exemples.

- $$\begin{aligned} f : [2, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{t^2+3t}{t^4-1} \end{aligned}$$

L'application f est continue et à valeurs positives et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et puisque $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

- $$\begin{aligned} g :]0, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\ln(1+t)}{(\sin t)^{3/2}} \end{aligned}$$

L'application g est continue et à valeurs positives et $g(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, puisque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt$ est convergente.

Exercice 3. Étudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} e^{-(\ln t)^\alpha} dt$ pour $\alpha > 0$.

Résolution.

4. INTÉGRABILITÉ

4.1. Convergence absolue.

DÉFINITION 6. (Fonction intégrable)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I (à valeurs réelles ou complexes).

On dit que f est intégrable sur I lorsque l'intégrale $\int_I |f|$ de la fonction positive $|f|$ est convergente. On dit aussi que l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente.

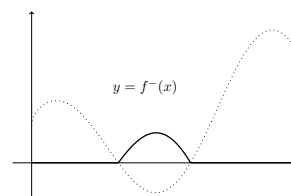
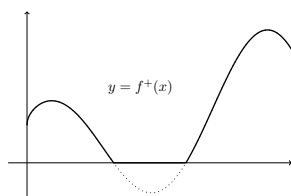
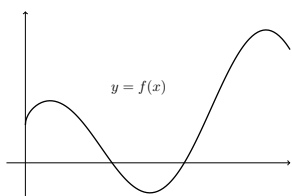
Ainsi «intégrable» ne signifie pas « que l'on peut intégrer » mais que l'on peut intégrer en valeur absolue (ou en module) ce qui est beaucoup plus exigeant, comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 11. (CVA $\implies$ CV ; Inégalité triangulaire)

Si f est intégrable sur I (à valeurs réelles ou complexes) alors l'intégrale $\int_I f$ est convergente et

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Démonstration. On traite d'abord le cas où f est à valeurs réelles. En posant $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$ et $f^- = \max(-f, 0) \geq 0$, on a $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.



On a $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$ donc $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent d'où, par linéarité, la convergence de $\int_I f$.

Si f est à valeurs complexes, on décompose en partie réelle et imaginaire : $f = \operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)$. Puisque $0 \leq |\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$, les deux intégrales $\int_I \operatorname{Re}(f)$ et $\int_I \operatorname{Im}(f)$ sont absolument convergentes et donc d'après le cas précédent elles convergent. Par linéarité, $\int_I f$ converge.

Pour l'inégalité triangulaire (que f soit à valeurs réelles ou complexes), supposons que $I = [a, b[$. D'après le résultat connu sur

les intégrales sur un segment (voir chapitre 3 ou cours de PCSI), pour tout $x \in [a, b[$, $\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f|$. Par passage à la limite quand $x \rightarrow b$, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$. Les autres cas pour l'intervalle I se traitent de manière analogue. ■

En appliquant les théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs positives, on obtient un théorème de comparaison pour l'intégrabilité :

THÉORÈME 12. (Théorème de comparaison de fonctions intégrables)

Soient $I = [a, b[$, $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

- Si $|f| \leq |g|$ ou $f = O(g)$ ou $f = o(g)$ alors g intégrable $\implies f$ intégrable.
- Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors f intégrable $\iff g$ intégrable.

Démonstration. Découle immédiatement des théorèmes de comparaison 9 et 10, en utilisant que $f = O(g) \iff |f| = O(|g|)$, $f = o(g) \iff |f| = o(|g|)$ et $f \sim g \implies |f| \sim |g|$. ■

Exemple. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\frac{\sin(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est absolument convergente.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction continue sur $]0, 1]$ et bornée est intégrable sur $]0, 1]$.

Résolution.

L'ensemble des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

PROPOSITION 13. (L'espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$)

L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration. C'est clairement un ensemble non-vidé, puisqu'il contient la fonction identiquement nulle. Si f et g sont intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{K}$ et d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda \cdot f + \mu \cdot g| \leq |\lambda| \cdot |f| + |\mu| \cdot |g|$$

On conclut avec la linéarité de l'intégrale et le théorème de comparaison. ■

4.2. Fonctions de référence.

PROPOSITION 14. (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est :

- intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Les grandes lignes sont établies dans les exemples page 4. ■

Exemples.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a, a+1]$ ainsi que sur $[a-1, a[$ ssi $\alpha < 1$. (Cf. exemple page 4).

PROPOSITION 15. (Intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ en a)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable au voisinage de a ssi $\alpha < 1$.

• La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$, de somme 1 (cf premier exemple page 4) et non intégrable sur $[1, +\infty[$. En effet :

$$\forall \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln(t) = 0 \implies \ln(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t \ln(t)} = 0 \implies \frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(\ln(t))$$

PROPOSITION 16. (Intégrabilité de $\ln$)

La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$ et non intégrable sur $[1, +\infty[$.

• La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $a > 0$ (cf. exemple page 4). En effet :

$$a > 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-at} = 0 \implies e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$a \leq 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t e^{-at}} = 0 \implies \frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$$

PROPOSITION 17. (Intégrabilité de $\exp$)

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.

• Intégrales de Bertrand (hors-programme : à savoir redémontrer à chaque usage!).

(Intégrales de Bertrand)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. L'application $f : t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Démonstration. La fonction est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

- Supposons que $\alpha > 1$. Il existe γ tel que $1 < \gamma < \alpha$ donc $\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)} = \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.
 - Supposons que $\alpha < 1$. Il existe γ tel que $\alpha < \gamma < 1$ donc $t^\gamma \times f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$.
- Il existe donc $A \geq 2$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$, $f(t) \geq \frac{1}{t^\gamma}$ donc $\int_2^{+\infty} f$ diverge.
- Supposons que $\alpha = 1$. Pour tout $x \geq 2$,

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} = \begin{cases} \left[\frac{\ln(\ln(t))}{\beta-1} \right]_2^x = \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))}{\beta-1} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \left[-\frac{1}{\beta-1} \times \frac{1}{\ln^{\beta-1}(t)} \right]_2^x = \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)} \right) & \text{si } \beta \neq 1 \end{cases}$$

$$\implies \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \beta = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta - 1 < 0 \\ \text{converge} & \text{si } \beta - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\implies \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \text{ converge ssi } \beta > 1$$

■

CONSEIL PRATIQUE D'ÉTUDE DE LA NATURE D'UNE INTÉGRALE.

1. on vérifie que la fonction f est continue par morceaux en précisant l'intervalle.
2. pour les bornes finies non comprises dans l'ensemble de définition, on vérifie s'il y a un prolongement par continuité possible.
3. sinon, on cherche un équivalent à une borne pour simplifier puis on majore ou minore pour se référer une fonction continue, typiquement les fonctions de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. Parfois, on commence par majorer, par exemple $t \mapsto \frac{\sin t}{\text{sh } t}$ sur $[1, +\infty[$

Exemple. Intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{\text{sh } t}$ sur $[1, +\infty[$.

Puisque $-1 \leq \sin(t) \leq 1$, $\left| \frac{\sin(t)}{\text{sh } t} \right| \leq \frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi $t \mapsto \frac{\sin t}{\text{sh } t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.3. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable sur $[a, +\infty[$.

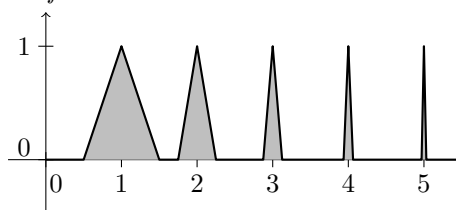
L'intégrabilité de $\int_0^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\lim_{+\infty} f = 0$, contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques (où le terme général tend vers 0).

Exemple. Une fonction intégrable qui n'a pas de limite en $+\infty$:

Soit f l'application définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2^n (x - n + 2^{-n}) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x \in [n - 2^{-n}, n] \\ -2^n (x - n - 2^{-n}) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x \in [n, n + 2^{-n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus clairement voici le graphe de f :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{n+2^{-n}} f(t) dt &= \sum_{k=1}^n \int_{k-2^{-k}}^{k+2^{-k}} f(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \times 2^{-k+1} \end{aligned}$$

car somme des aires de triangles isocèles de hauteur 1 et base 2^{-k+1}

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n 2^{-k} \\ &= 1 - 2^{-n} \end{aligned}$$

d'où f est intégrable sur $[0, +\infty[$ avec $\int_0^{+\infty} f = 1$, et f n'a clairement aucune limite en $+\infty$ puisque $\forall A > 0, \exists x \geq A$ avec $f(x) = 0$ et $\exists x' \geq A$ avec $f(x') = 1$.

Par contre lorsque f admet une limite en $+\infty$ son intégrabilité au voisinage de $+\infty$ entraîne une limite nulle en $+\infty$:

THÉORÈME 18. (Intégrabilité et limite en $+\infty$)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ existe ; si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\ell = 0$.

En corollaire, si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ existe alors $\ell = 0$.

Démonstration. Procédons par l'absurde en supposant que $\ell \neq 0$; quitte à changer f en $-f$, par linéarité, on peut supposer que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\ell = +\infty$.

Par définition il existe $A > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \geq \alpha$, $f(x) \geq A$ (si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, prendre $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ et $A = \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$). Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geq \alpha$: $\int_\alpha^x f \geq A \times (x - \alpha) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$; ainsi $\int_\alpha^{+\infty} f$ diverge et donc $\int_a^{+\infty} f$ aussi ; contradiction. ■

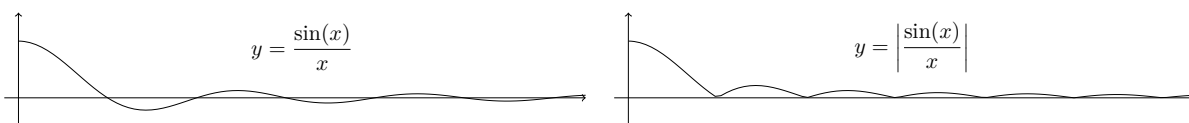
C'est une condition nécessaire, mais non suffisante d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

4.4. Intégrales semi-convergentes.

Il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (on parle d'intégrales semi-convergentes), leur étude n'est pas un objectif du programme, étudions tout de même, en guise

d'exemple, l'intégrale classique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge mais la fonction intégrande n'est pas intégrable (et pourtant on peut l'intégrer).



L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge ; en intégrant par parties :

Pour tout (x, y) tel que $0 < x < y$

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_x^y + \int_x^y \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(y)}{y} = 0$, ce qui montre la convergence du crochet lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $y \rightarrow +\infty$.

Et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$, et donc $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et donc $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ceci montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge. De plus :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

(Remarque. On peut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$; par exemple avec une transformée de Laplace.)

Quant à l'intégrabilité :

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} |f| &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi} dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \times (-1)^k \left[-\cos(t) \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \times (-1)^k \times 2 \times (-1)^k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

ce qui montre, puisque la série harmonique est divergente, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} |f| = +\infty$. Ainsi $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Remarque. On retiendra que pour étudier l'intégrabilité de la fonction $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$, il suffit d'étudier le comportement local de f au voisinage de a et au voisinage de b , les trois grandes méthodes étant :

- la recherche d'un prolongement par continuité (limite finie pour une borne finie)
- la recherche d'un équivalent avec une fonction intégrable
- à défaut la majoration (locale) en valeur absolue par une fonction intégrable.

5. CALCUL D'INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

Bien sûr pour procéder au calcul d'une intégrale généralisée, on peut, après avoir établi la convergence ou en même temps, intégrer sur un segment $[x, y]$ avant de faire tendre x et/ou y vers les bornes de l'intégrale.

C'est notamment cette approche que l'on applique pour un calcul à l'aide d'une primitive.

Les formules de changement de variable et d'intégration par parties peuvent aussi s'appliquer directement sur l'intégrale généralisée, sans passer par une intégration sur un segment ; mais au prix de quelques précautions.

5.1. Changement de variable.

THÉORÈME 19. (Changement de variable)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I , et φ une bijection de $] \alpha, \beta[$ sur $] a, b[$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarques.

- Si on modifie juste l'hypothèse de stricte croissance par la stricte décroissance, on obtient :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)du = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

(les bornes sont inversées).

- On peut bien sûr appliquer ce théorème sur la fonction $|f|$ pour étudier l'intégrabilité de f .

Démonstration. (Esquisse) la preuve s'appuie sur la formule connue pour une intégration sur un segment :

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

mais l'hypothèse de bijectivité est maintenant requise sur φ pour pouvoir établir le résultat en passant aux limites (admis)... ■

Exercice 5. On peut par un changement de variable passer d'une intégrale « impropre » (= pas extensible sur un segment) à une intégrale « propre ».

Montrer que $\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^1 e^{u^2} du$. (On ne demande pas de calculer cette intégrale).

Résolution.

Exercice 6. Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$.

Résolution.**PROPOSITION 20.**

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. Alors :

- f est intégrable en a si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+ .
- f est intégrable en b si et seulement si $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Démonstration. Soit $c \in]a, b[$. On procède au changement de variable $u = a + t$, ($\mathcal{C}^1$ et strictement croissante), dans le premier cas, et $v = b - t$, ($\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante), dans le second cas :

$$\begin{aligned} \int_a^c |f(u)|du & \text{ a même nature que } \int_0^{c-a} |f(a+t)|dt & \text{ et } t \mapsto f(a+t) \text{ est continue par morceaux sur }]0, b-a[\\ \int_c^b |f(v)|dv & \text{ a même nature que } \int_0^{b-c} |f(b-t)|dt & \text{ et } t \mapsto f(b-t) \text{ est continue par morceaux sur }]0, b-a[\end{aligned}$$

5.2. Intégration par partie.

Voici un énoncé possible d'une intégration par partie dans le cas d'un intervalle $[a, b[$.

THÉORÈME 21. (Intégration par partie)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

où $\left[f(t)g(t) \right]_a^b$ représente $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

Démonstration. On utilise simplement pour $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)dt$$

■

Remarques.

- Dans la pratique, on effectue une intégration par partie sur $[a, x]$ puis on fait tendre x vers b .
- Une petite subtilité. Dans le cas d'une intégration par partie où le crochet converge, une intégrale peut comporter une fonction intégrable et pas l'autre mais cependant elles sont toutes deux convergentes (en clair l'une est absolument convergente et pas l'autre).

On a vu (page 12) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

et que l'intégrale de gauche n'est pas absolument convergente, tandis que celle de droite est absolument convergente (car $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$).

Exemple. Important : la fonction Gamma (à connaître).

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$; en effet :

- si $x \geq 1$: elle se prolonge par continuité en 0 et $f_x(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$,
- si $1 > x > 0$: $f_x(t) \sim \left(\frac{1}{t^a}\right)$ avec $a < 1$ et $f_x(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- si $0 \geq x$: $f_x(t) \sim \left(\frac{1}{t^a}\right)$ avec $a \geq 1$.

L'application

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \end{aligned}$$

est appelée fonction Gamma.

Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned}$$

(elle étend aux réels la fonction factorielle).

En effet ; appliquons une intégration par partie à l'intégrale :

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-t} & v'(t) &= -e^{-t} \\ u(t) &= \frac{1}{x}t^x & u'(t) &= t^{x-1} \end{aligned}$$

Puisque pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x}t^xe^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}t^xe^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

et donc par intégration par partie, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^xe^{-t} dt \implies \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \implies \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

En particulier $\Gamma(n+1) = n!$; par récurrence :

Initialisation.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 1 - 0 = 1$$

Hérédité. Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$; alors :

$$\Gamma(n+2) = (n+1) \times \Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

□