Chapitre 3

Intégration sur un segment ; révisions et compléments

https://www.jean-philippe-preaux.fr

Table des matières

Introduction 1
1. Prérequis 1
1.1. Extension des notions de limite et continuité aux fonctions complexes 1
1.2. Subdivision d'un segment 2
1.3. Fonctions en escalier 3
1.4. Fonctions continues par morceaux 3
2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux (sur un segment) 4
2.1. Intégrale d'une fonction en escalier 4
2.2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux 5
3. Propriétés 6
3.1. Propriétés générales 6
3.2. Valeur moyenne d'une fonction 7
3.3. Sommes de Riemann 7
4. Calcul intégral 9
4.1. Théorème fondamental de l'analyse 9
4.2. Primitives usuelles 11
4.3. Intégration par partie 15
4.4. Changement de variable 16
4.5. Application aux intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques 16

Introduction

La théorie de l'intégration trouve son origine dans les calculs d'aire et de volume. Suite aux travaux de Pascal, Leibniz et Newton (17^{e} siècle) est née la théorie du calcul différentiel et intégral. L'intégration y est l'opération « inverse » de la dérivation (primitive). C'est le point de vue du programme des lycées où l'intégrale d'une fonction continue (ou dérivable) est définie au moyen d'une primitive. Si on se place du point de vue du calcul d'aire (ou de son équivalent algébrique, linéarité, Chasles, etc.), l'espace des fonctions continues peut paraitre un peu limité. Dans notre programme, nous intégrons des fonctions continues par morceaux, utiles notamment pour les transformées de Fourier (fin 18^{e}, traitement du signal etc.) et suivons la démarche de Riemann (19^{e} siècle). Des résultats puissants d'interversion entre lim et $\int$ furent démontrés dans un cadre très général par Lebesgue (début 20^{e}), nous verrons plus tard quelques applications de ces théorèmes dans le cadre des intégrales à paramètres.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Prérequis

1.1. Extension des notions de limite et continuité aux fonctions complexes.

I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point, et a un point de I ou une borne de I (finie ou infinie).

Définition 1. (Limite d'une fonction à valeur complexe)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a, que l'on note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad ou \quad \lim_a f = \ell$$

si :

- *lorsque $a \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

- *lorsque $a = +\infty$:*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- *lorsque $a = -\infty$:*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x \leqslant -M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarques.

• Comme dans le cas d'une fonction réelle, on définit aussi lorsque $a \in \mathbb{C}$ la limite à gauche/droite en a : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$. On a encore la caractérisation attendue :
$$\text{Si } a \in I : \lim_{x \to a} f = \ell \iff \lim_{x \to a^-} f = \lim_{x \to a^+} f = f(a) = \ell$$
$$\text{Si } a \notin I : \lim_{x \to a} f = \ell \iff \lim_{x \to a^-} f = \lim_{x \to a^+} f = \ell$$
• Lorsqu'elle existe la limite est unique. (La preuve est identique au cas réel).

Propriété 1. *Sous les mêmes hypothèses ; en notant :*
$$Re(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Re(f(x)) \end{array} \qquad Im(f) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Im(f(x)) \end{array}$$
$$\lim_{x \to a} f = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} Re(f) = Re(\ell) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to a} Im(f) = Im(\ell) \end{cases}$$

Démonstration. (Esquisse) Le sens direct découle de $\max(|Re(z)|, |Im(z)|) \leqslant |z|$:
$$|Re(f)(x) - Re(\ell)| \leqslant |f(x) - \ell| \quad \text{et} \quad |Im(f)(x) - Im(\ell)| \leqslant |f(x) - \ell|$$
Le sens réciproque découle facilement de l'inégalité triangulaire :
$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &= |Re(f)(x) - Re(\ell) + \mathrm{i}\,(Im(f)(x) - Im(\ell))| \\ &\leqslant |Re(f)(x) - Re(\ell)| + |Im(f)(x) - Im(\ell)| \end{aligned}$$
∎

Définition 2. (Continuité d'une fonction à valeurs complexes)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$;
- *f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Remarque. Comme dans le cas réel, les opérations usuelles, combinaison linéaire, produit, quotient, préservent la continuité. (Preuves identiques au cas réel).

1.2. Subdivision d'un segment.

Définition 3. (Subdivision d'un segment)
Soit $[a, b]$ un segment ; une subdivision du segment $[a, b]$ est une suite finie $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ d'éléments de $[a, b]$ strictement croissante vérifiant :
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Définition 4. (Subdivision régulière d'un segment)
Avec les mêmes notations, si en outre, la suite (x_i) est arithmétique, c'est-à-dire :
$$\exists r > 0,\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_{i+1} - x_i = r$$
alors la subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ du segment $[a, b]$ est dite régulière. Le pas de la subdivision est alors :
$$r = \frac{b - a}{n}$$

En particulier,

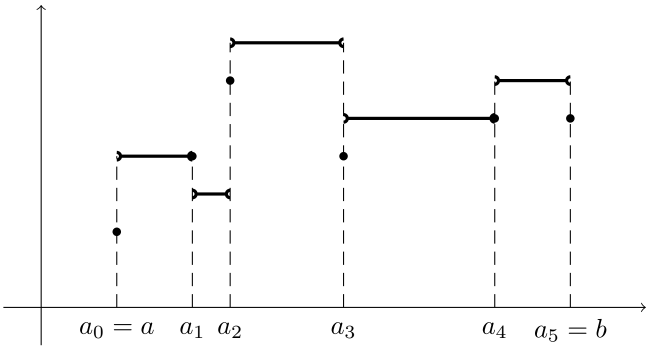
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ x_i = a + i \times \frac{b-a}{n}$$

1.3. Fonctions en escalier.

Définition 5. (Fonctions en escalier)
Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite en escalier si il existe une subdivision $(a_0 = a, \ldots, a_n = b)$ de l'intervalle $[a, b]$, telle que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \varphi_{|]a_i, a_{i+1}[} = C^{ste} = k_i$$

une telle subdivision est appelée une subdivision subordonnée (ou adaptée) à φ.



Remarque. Une subdivision subordonnée à une fonction en escalier ϕ n'est pas unique : donnée une subdivision (x_i), continuer à subdiviser les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ donnera une autre subdivision subordonnée à ϕ. Mais il en existe une seule (de cardinal) minimal(e) : celle pour laquelle les valeurs prises par ϕ en $]x_{i-1}, x_i[$, x_i et $]x_i, x_{i+1}[$ sont partout différentes. Cette subdivision minimale est une suite extraite commune à toutes les subdivisions subordonnées à ϕ.

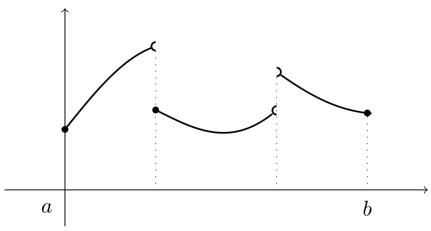
Propriété 2. *Combinaisons linéaires et produit de deux fonctions φ, $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escaliers, sont aussi des fonctions en escaliers.*

Démonstration. (Esquisse) On peut toujours prendre une subdivision subordonnée à la fois à φ et à ψ : à partir de deux subdivisions de $[a, b]$ subordonnées rspectivement à φ et ψ, considérer la subdivision de $[a, b]$ dont les éléments en sont réunion. Il est alors clair que sur chaque intervalle de $]x_i, x_{i+1}[$ de cette subdivision commune, $\lambda\varphi + \mu\psi$ et $\varphi \times \psi$ sont constantes. ∎

1.4. Fonctions continues par morceaux.

Définition 6. (Fonction continue par morceaux sur un segment)
Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si elle est continue sauf en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites à droite et à gauche finies.
On note $\mathscr{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemples.



• La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$.

• La fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsque $a < 0 < b$ car ses limites à droite et à gauche en 0 sont infinies.

Définition 7. (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)
Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ dans I.
On note $\mathscr{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Propriété 3. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$; f est continue par morceaux ssi $Re(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Im(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ le sont.*

Démonstration. (Esquisse) Découle de la propriété 1. ∎

Propriété 4. *Combinaisons linéaires et produit de deux fonctions f, $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux, sont aussi des fonctions continues par morceaux.*

Démonstration. Soit $[a, b] \subset I$ un segment et soit D la réunion des points de discontinuité de f et de g ; D est fini et $\lambda f + \mu f$ ainsi que $f \times g$ sont continues en tout point de $I \setminus D$. En tout point de D $\lambda f + \mu f$ et $f \times g$ admettent une limite à droite/gauche finie. ∎

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux (sur un segment)

La construction de l'intégrale d'une fonction continue/continue par morceaux doit être vue, mais n'est pas exigible.

2.1. Intégrale d'une fonction en escalier.

Définition 8. (Intégrale d'une fonction en escalier)
Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier, et soit une subdivision $(a_0 = a, \ldots, a_n = b)$ de l'intervalle $[a, b]$ subordonnée à φ :

$$\forall i, \ \varphi_{|]a_i, a_{i+1}[} = C^{ste} = k_i$$

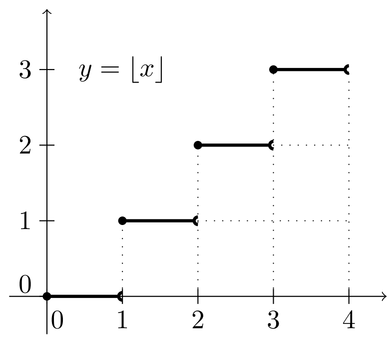
On définit alors l'intégrale de φ :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(t) \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \times k_i \quad \in \mathbb{K}$$

Ce nombre est indépendant du choix de la subdivision adaptée à φ.

Exemple. La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction en escalier.

$$\int_0^4 \lfloor t \rfloor dt = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1$$
$$= 6$$
$$\int_0^n \lfloor t \rfloor dt = \sum_{k=0}^{n-1} k \times 1$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}$$



Remarque. Interprétation géométrique : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est l'aire "algébrique" délimitée entre la courbe de φ et l'axe des abscisses ; "algébrique" car elle peut prendre des valeurs négatives.

On vérifie les propriétés :

Propriété 5. *Soient φ, ψ des fonctions en escalier.*

- $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ *ne dépend pas des valeurs prises par* φ *en ses points de discontinuité.*
- *Si* φ *et* ψ *sont deux applications en escaliers de* $[a,b]$ *sur* $\mathbb{K}$ *ne différant qu'en un nombre fini de points alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi$
- *Linéarité :* $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$
- *Croissance : si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \leqslant \psi$ *alors* $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$
- *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|$
- *Relation de Chasles :* $\displaystyle\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \varphi$

Démonstration. (Esquisse) Toutes découlent rapidement de la définition. ■

2.2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 6. (d'approximation par des fonctions en escaliers)
Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *; pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe deux fonctions en escaliers* $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que :*

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Admis. ■

Proposition-Définition 9. (Intégrale de $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$)
Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *; alors*

$$\sup\left\{\int_a^b \varphi \;\middle|\; \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leqslant f\right\} \qquad \text{et} \qquad \inf\left\{\int_a^b \psi \;\middle|\; \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}$$

existent et sont égaux. Ce nombre est appelé intégrale de f *sur* $[a,b]$ *et noté*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f.$$

Démonstration. (Non exigible). Puisque $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, f est bornée donc majorée, disons par M.
Soit φ en escalier telle que $\varphi \leqslant f$ alors $\varphi \leqslant M$, donc $\int_a^b \varphi \leqslant M(b-a)$, donc $\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leqslant f\}$ est majoré, donc le sup existe, notons le I^- ; par le même argument f est minorée et $\inf\{\int_a^b \psi \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\}$ existe, notons le I^+ ; clairement $\mathrm{I}^- \leqslant \mathrm{I}^+$. D'après le théorème précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ donc $\psi - \varphi$ est en escalier, $\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon(b-a)$ et $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi$. On a donc : $\int_a^b \varphi \leqslant \mathrm{I}^-$ et $\mathrm{I}^+ \leqslant \int_a^b \psi$ et donc par linéarité $0 \leqslant \mathrm{I}^+ - \mathrm{I}^- \leqslant \varepsilon(b-a)$ pour tout $\varepsilon > 0$; donc $\mathrm{I}^+ = \mathrm{I}^-$. ■

Remarque. Interprétation géométrique lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Définition 10. (Extension aux fonctions complexes)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue par morceaux. On définit :*

$$\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + \mathrm{i}\int_a^b Im(f).$$

Remarque. Bien sûr, $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$, aussi lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, on retrouve la définition de $\int_a^b f$.

On peut aussi définir l'intégrale d'une fonction continue par morceau, à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue :

Proposition-Définition 11.
Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ et soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ses points de discontinuité.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on définit l'application $f_i : [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x) & \text{si } x = x_i \\ \lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f(x) & \text{si } x = x_{i+1} \end{cases}$$

Alors f_i est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, et on définit :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\mathrm{d}t}.$$

Démonstration. (Esquisse) Découle de la relation de Chasles (appliquée aux points de discontinuité) et au fait que changer la valeur de la fonction en un nombre fini de points ne change pas son intégrale. (Voir paragraphe suivant). ∎

Définition 12. Inversion des bornes
Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$. On définit :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^a f = 0.$$

3. Propriétés

3.1. Propriétés générales.

Propriété 7. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues par morceaux et soient $a, b, c \in I$:*

- *$\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas des valeurs prises par f en ses points de discontinuité et si f et g ne diffèrent qu'en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$*
- *Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$*
- *Positivité : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$*
- *Croissance : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$*
- *Inégalité triangulaire : si $a \leqslant b$: $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$*
- *Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$*

Démonstration. (Esquisse) Elles s'obtiennent par passage à la limite à partir de la propriété 5. ∎

Propriété 8. *Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$, alors $\displaystyle\int_a^b f = 0 \implies f = 0$.*

Démonstration. Montrons la contraposée : si $f \neq 0$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Puisque f est continue, on peut supposer $c \in]a,b[$ et de $\lim_c f = f(c)$, par définition, en posant $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, on obtient $\exists \alpha > 0,\ |x-c| \leqslant \alpha \implies |f(x)-f(c)| \leqslant \varepsilon$ et donc en posant $c_1 = \max(a, c-\alpha) < c$ et $c_2 = \min(b, c+\alpha) > c$:

$$c-\alpha \leqslant c_1 \leqslant x \leqslant c_2 \leqslant c+\alpha \implies f(x) \geqslant f(c) - \frac{f(c)}{2} = \frac{f(c)}{2} > 0$$

D'après la relation de Chasles, et par positivité et croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c_1} f}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{c_1}^{c_2} f}_{\geqslant (c_2-c_1)\frac{f(c)}{2}>0} + \underbrace{\int_{c_2}^{b} f}_{\geqslant 0} > 0$$

■

3.2. Valeur moyenne d'une fonction.

Propriété 9. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$; si pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :*

$$m(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M(b-a)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la croissance de l'intégrale à $m \leqslant f \leqslant M$. ■

Définition 13. (Valeur moyenne)
Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$; la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Pour une fonction continue, la valeur moyenne est une valeur atteinte par la fonction sur l'intervalle $[a,b]$.

Propriété 10. *Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors sa valeur moyenne $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ est atteinte par f sur $[a,b]$:*

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Démonstration. D'après le théorème des bornes atteintes, $f([a,b]) = [m,M]$; d'après le T.V.I. et la propriété 9, $\exists c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$. ■

3.3. Sommes de Riemann.

Définition 14. (Sommes de Riemann)
Soient $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle somme de Riemann de f d'ordre n le réel :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right).$$

Remarque. Interprétation géométrique.

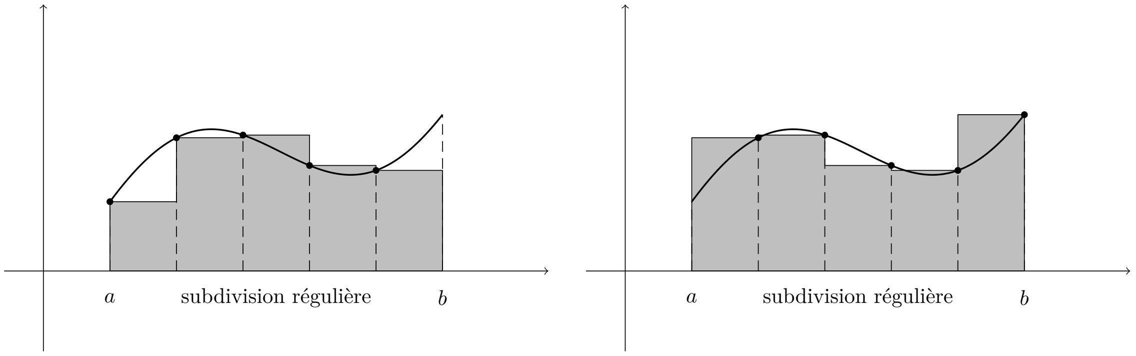
On découpe le domaine $[a,b]$ sur une subdivision régulière $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ en n segments. Chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$ a pour longueur $\frac{b-a}{n}$. Si on somme les aires de tous les rectangles de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur :

– $f(a_k)$: on obtient la première somme de Riemann :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

– $f(a_{k+1})$: on obtient la deuxième somme de Riemann :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_{k+1}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k\right)$$



Propriété 11. (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. Si on somme de 1 à n au lieu de 0 à $n-1$, la somme converge toujours vers la même limite.

Démonstration. (Esquisse). Dans le cas particulier où f est Lipschitzienne : $\exists K > 0,\ \forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$. Soit $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On applique pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ le théorème des bornes atteintes sur $[a_k, a_{k+1}]$ et la propriété 9 :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{b-a}{n} \times \min_{[a_k,a_{k+1}]} f \leqslant \int_{[a_k,a_{k+1}]} f \leqslant \frac{b-a}{n} \times \max_{[a_k,a_{k+1}]} f$$

puisque f est K-Lipschitzienne :

$$f(a_k) - \frac{b-a}{n} \times K \leqslant \min_{[a_k,a_{k+1}]} f \leqslant \max_{[a_k,a_{k+1}]} f \leqslant f(a_k) + \frac{b-a}{n} \times K$$

ce qui donne l'encadrement :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{b-a}{n} \times f(a_k) - K\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leqslant \int_{[a_k,a_{k+1}]} f \leqslant \frac{b-a}{n} \times f(a_k) + K\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

On somme les inégalités de 0 à $n-1$ et on applique la relation de Chasles :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \frac{K(b-a)^2}{n} \leqslant \int_a^b f \leqslant \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{K(b-a)^2}{n}$$

qu'on utilise pour encadrer la somme :

$$\int_a^b f - \frac{K(b-a)^2}{n} \leqslant \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \leqslant \int_a^b f + \frac{K(b-a)^2}{n}$$

Puisque $\frac{K(b-a)^2}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, avec le théorème des gendarmes : $\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$. ∎

Remarque. De plus l'erreur commise en approximant $\int_a^b f$ par $\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Plus précisément :

Propriété 12. (Erreur commise)

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, l'erreur commise en approximant $\int_a^b f$ par $\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ est majorée par :

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \leqslant \max_{[a,b]} |f'| \times \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Démonstration. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\forall t \in [a_k, a_{k+1}],\ |f(t) - f(a_k)| \leqslant \max_{[a,b]} |f'| \times |t - a_k|$$

ainsi de Chasles et de $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ découle :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k)\mathrm{d}t \right| && \text{linéarité de } \int \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,\mathrm{d}t && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \max_{[a,b]} |f'| \times \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k)\,\mathrm{d}t && \text{Ineg. acc. finis} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \max_{[a,b]} |f'| \times \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} \leqslant \max_{[a,b]} |f'| \times \frac{(b-a)^2}{2n} && \text{linéarité de } \sum
\end{aligned}$$

■

Remarque. Application : calcul approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

```python
def methodeRectangle(f, a, b, n):
    """Calcul approche de l'integrale de f entre a et b
    renvoie la somme de Riemann (à gauche par ex)
    pour n segments. Plus n est grand, meilleure est
    l'approximation."""
    x = a
    delta = (b-a)/n
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + f(x)
        x = x + delta
    return delta * S
```

Remarque. Cas particulier important : on utilise souvent les sommes de Riemann dans le cas d'une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exercice 1. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-3/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}.$$

Résolution.

4. Calcul intégral

4.1. Théorème fondamental de l'analyse.

Définition 15. (Primitive)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété 13. *Deux primitives de f diffèrent d'une constante additive.*

Démonstration. Soit $F, G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $F - G$ est dérivable sur I et $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$, ainsi $F - G$ est constante sur I : $\exists c \in \mathbb{R},\ F = G + c$. ■

Théorème 14. (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$; soit $a \in I$. Alors la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F_a : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a.

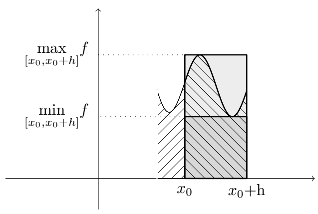
Démonstration. (Esquisse) Dans le cas où f change de signe un nombre fini de fois.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} A\ : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x_0 & \longmapsto & \text{l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a \text{ et } x = x_0 \end{array}$$

Montrons que A est une primitive de f sur $[a, b]$.

• Cas où f est positive sur $[a, b]$.
Soit $x_0 \in [a, b[$; dérivabilité à droite de A en x_0 :
Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
Puisque f est continue sur $[x_0, x_0 + h]$, elle y est bornée et atteint ses bornes :

$$\min_{[x_0,x_0+h]} f \text{ et } \max_{[x_0,x_0+h]} f.$$



Ainsi :

$$h \times \min_{[x_0,x_0+h]} f \leqslant A(x_0+h) - A(x_0) \leqslant h \times \max_{[x_0,x_0+h]} f$$

Or puisque f est continue (à droite) en x_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\min_{[x_0,x_0+h]} f \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x_0) \\ \displaystyle\max_{[x_0,x_0+h]} f \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x_0) \end{array} \right. \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in [x_0, x_0+h], |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \\ \Longrightarrow \left| \displaystyle\min_{[x_0,x_0+h]} f - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left| \displaystyle\max_{[x_0,x_0+h]} f - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

Ainsi, après avoir divisé par $h > 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = A'_d(x_0) = f(x_0)$$

Le même argument s'applique pour $x_0 \in]a, b]$ et $h < 0$, ce qui montre que A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$.

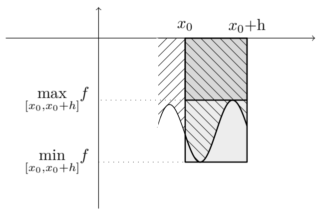
Ainsi A est une primitive de f,

$$A(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

et $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.
• Cas où f est négative sur $[a, b]$.
Le même argument que précédemment montre que pour $h > 0$:

$$-h \max_{[x_0,x_0+h]} f \leqslant A(x_0+h) - A(x_0) \leqslant -h \min_{[x_0,x_0+h]} f$$

$$-\max_{[x_0,x_0+h]} f \leqslant \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \leqslant -\min_{[x_0,x_0+h]} f$$



On obtient finalement :

$$-A(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

• Cas où f change de signe un nombre fini de fois sur $[a, b]$:

Il existe des réels $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], f \text{ est de signe constant sur } [a_{k-1}, a_k]$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ notons :

$$\begin{array}{rcl} A_k\ : [a_k, a_{k+1}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x_0 & \longmapsto & \text{l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a_k \text{ et } x = x_0 \end{array}$$

$$\mathcal{A}_k = A_k(a_{k+1}) \text{ l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a_k \text{ et } x = a_{k+1}$$

$$\text{et } s_k = \pm 1 \text{ ayant même signe que } f \text{ sur } [a_k, a_{k+1}]$$

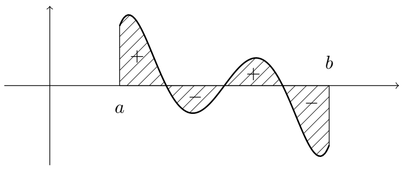
Avec ce qui précède l'application définie sur $[a, b]$ par $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in [a_k, a_{k+1}]$:

$$F(x) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} s_j \times \mathcal{A}_j \right) + s_k \times A_k(x)$$

est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $F'(x) = f(x)$. De plus pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, F est dérivable à droite et à gauche en a_k et $F'_g(a_k) = F'_d(a_k) = f(a_k)$. Ainsi F est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f ; c'est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

et $\int_a^b f(t)dt$ s'obtient en faisant la différence de la somme des aires délimitées par $\mathbb{C}_f$, (Ox), $x = a$, $x = b$ au dessus de la courbe et de la somme de celles au-dessous de la courbe.



■

Remarque. Ainsi :

Lorsque $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b$$

où $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une primitive de* f*.*

Corollaire 15. (Existence de primitives)
Toute fonction continue sur I *admet des primitives sur* I*.*

Exercice 2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\operatorname{Arctan} t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la dérivée de F.

Résolution.

4.2. **Primitives usuelles.** Table des primitives usuelles à connaître :

$f(x)$	*Domaine de définition*	$\int f(t)\mathrm{d}t$	*Avec*
a	$\mathbb{R}$	ax	$a \in \mathbb{R}$
x^α	$\mathscr{D} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln(x) - x$	
e^{ax}	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	$a \in \mathbb{R}^*$

$f(x)$	*Domaine de définition*	$\int f(t)\mathrm{d}t$	*Avec*
a^x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan(x)$	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\mathrm{Arccos}(x)$	

À utiliser avec les opérations sur les primitives :

Fonction	$f+g$	λf	$f' \times g$	$(f' \circ u) \times u'$
Primitive	$\int f(t)\mathrm{d}t + \int g(t)\mathrm{d}t$	$\lambda \int f(t)\mathrm{d}t$	$f \times g - \int f \times g'(t)\mathrm{d}t$	$f \circ u$

Notamment la dernière, primitive $f \circ u$ de $(f' \circ u) \times u'$, donne la table, très utile, des primitives de composées :

Fonction	**une primitive**	**avec**	**Remarque**
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$		
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$(*)$
$\frac{u'}{u^\alpha}$	$\frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	*Cas particulier de* $(*)$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$		*Cas particulier de* $(*)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$		*Cas particulier de* $(*)$
$\frac{u'}{u\sqrt{u}}$	$-2 \times \frac{1}{\sqrt{u}}$		*Cas particulier de* $(*)$
$u'e^u$	e^u		
$(\cos u) \times u'$	$\sin(u)$		

Fonction	**une primitive**	**avec**	**Remarque**
$(\sin u) \times u'$	$-\cos(u)$		
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}(u)$		
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(u)$		
$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arccos}(u)$		

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et a pour primitive :

- si $n = 1$: $\ln|x-a|$ $\left(\text{appliquer } \displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|\right)$
- si $n \geqslant 2$: $\dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$ $\left(\text{appliquer } \displaystyle\int \frac{u'}{u^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}}\right)$

Exemple. Méthode : Calcul de $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$.

Il y a 3 cas à considérer selon que le trinôme au dénominateur admet 2 racines réelles distinctes, 1 racine réelle double, ou aucune racine réelle.

• Premier cas : si x^2+px+q admet deux racines réelles distinctes c et d.

$$x^2+px+q = (x-c)(x-d)$$

On cherche alors 2 réels α et β tel que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\alpha}{x-c} + \frac{\beta}{x-d}$$

par linéarité :

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{x-c}\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x-d}\mathrm{d}x = \alpha \times \ln|x-c| + \beta \times \ln|x-d|.$$

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$.

Résolution.

• Deuxième cas : x^2+px+q admet une racine réelle double c :

$$x^2+px+q=(x-c)^2$$

On cherche deux reéls α et β tels que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\alpha}{x-c}+\frac{\beta}{(x-c)^2}$$

Exercice 4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$.

Résolution.

• Troisième cas : x^2+px+q n'a aucune racine réelle.

Si $a\neq 0$, on commence par faire apparaître au numérateur la dérivée $2x+p$ du dénominateur :

$$ax+b=\frac{a}{2}\times(2x+p)+b-\frac{ap}{2}$$

puis on applique la linéarité :

$$\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x&=\frac{a}{2}\times\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\times\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{2}\times\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\times\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pour calculer $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ on utilise la forme canonique du trinôme pour se ramener à $\dfrac{1}{1+X^2}$ dont une primitive est $\mathrm{Arctan}X$:

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2-\frac{\Delta}{4}}=\frac{4}{-\Delta}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times(x+\frac{p}{2})\right)^2+1}$$

$$\Longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\frac{4}{-\Delta}\times\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\times\underbrace{\int\frac{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times(x+\frac{p}{2})\right)^2+1}\mathrm{d}x}_{\int\frac{u'}{1+u^2}=\mathrm{Arctan}u}$$

$$\Longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)$$

Exercice 5. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

Résolution.

4.3. **Intégration par partie.**

La dérivée d'un produit donne comme formule de primitivation l'intégration par partie :

Théorème 16. (Intégration par partie)
Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), a, b \in I$
Alors $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$

Démonstration. De $(uv)' = u'v + uv'$ découle $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. ■

Remarque. Pour savoir quelle fonction dériver et quelle fonction primitiver, on peut penser au principe des ALPES :
A=Arctan, Arcsin, Arccos,
L=Logarithmes
P=Polynômes
E=Exponentielles
S=sin, cos, tan, sh, ch.
On privilégie de dériver les fonctions les plus en haut. Attention ce n'est pas 100% fiable.

Exercice 6. Déterminer la primitive de $t \mapsto t \times \mathrm{Arctan}(t)$ s'annulant en 0.

Résolution.

4.4. Changement de variable.

La dérivée d'une composée fournit pour la primitivation la formule de changement de variable.

Théorème 17. (Changement de variable)
Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, f continue sur $\varphi(I)$ et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $\varphi(I)$:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t = [F\circ\varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi a}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

■

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t+t\ln(t)}$ en utilisant le changement de variable $x = \ln(t)$.

Résolution.

4.5. Application aux intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques.

Corollaire 18. *Si f est continue sur I et T-périodique, alors $\forall (a,b)\in I^2$, $\forall n\in\mathbb{Z}$:*

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{si } I=\mathbb{R} \ : \quad \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Pour la première, on effectue le changement de variable $t = x + nT$; $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$:

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \underbrace{f(x+nT)}_{=f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Pour la seconde à l'aide du changement de variable $t = x + T$; $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$:

$$\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(x+T)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

et donc :

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

■

Corollaire 19. *Soit $a > 0$;*

– si f est paire et continue sur $[-a,a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\times\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$;

– si f est impaire et continue sur $[-a,a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$;

Démonstration. Soit f paire ou impaire ; $\exists\varepsilon = \pm 1, \forall x\in[-a,a],\ f(-x) = \varepsilon\times f(x)$.

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{t=-x\\ \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x}} + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a \varepsilon\times f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\times\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t & \text{si } \varepsilon = 1\\ 0 & \text{si } \varepsilon = -1\end{cases}$$

■