Chapitre 2

Révisions : sur les fonctions réelles

https://www.jean-philippe-preaux.fr/

Table des matières

Dans tout ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

1. Limites d'une fonction

1.1. Définitions.

1.1.1. *En un point.*

Définition 1. (Limite d'une fonction en un point)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, a un réel appartenant à I ou extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$; on dit que :

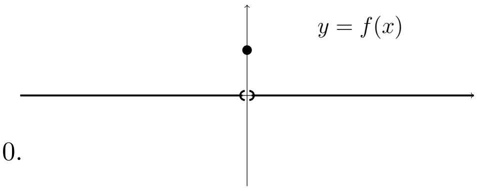
- *$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a (noté $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$) lorsque*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- *$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a (noté $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$) lorsque*
$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant A$$
- *$f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a (noté $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$) lorsque*
$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant -A$$

Remarques.
• En français :
– "Pour tout voisinage V de ℓ (resp. $+\infty$, $-\infty$), il existe un voisinage U de a dans I tel que f envoie U dans V ($f(U) \subset V$)."
Ou :
– "Pour que $f(x)$ soit suffisamment proche de ℓ (resp. $+\infty$, $-\infty$), il suffit que x soit suffisamment proche de a."
• On définit aussi les limites en a à droite ($x \to a^+$) ou à gauche ($x \to a^-$) en ajoutant à la condition $|x-a| \leqslant \alpha$, "et $x > a$" (resp. $x < a$).
Attention les inégalités sont strictes : lorsque $a \in I$, la valeur $f(a)$ n'influe pas sur $\lim_{a^\pm} f$ tandis que

lorsque f admet pour limite ℓ en $a \in I$, nécessairement $\lim_a f = f(a)$.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



n'admet pas de limite en 0 ; par contre $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0$.

On a alors le résultat :

Soit $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = f(a) = \ell$$

Définition et caractérisation s'étendent lorsque f est définie à droite et à gauche de a, mais pas en a :

Soit $a \in I$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

Exemples. La fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ a pour limite $-\infty$ en 0^-, $+\infty$ en 0^+ et aucune limite en 0.

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0.

1.1.2. *En $\pm\infty$.*

Définition 2. (Limite d'une fonction en $+\infty$)
On suppose I non majoré (c'est à dire $I = (a, +\infty[$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :

- *$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ (noté $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$) lorsque*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- *$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (noté $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$) lorsque*
$$\forall A > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \implies f(x) \geqslant A$$
- *$f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (noté $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$) lorsque*
$$\forall A > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \implies f(x) \leqslant -A$$

Définition 3. (Limite d'une fonction en $-\infty$)
On suppose I non minoré (c'est à dire de la forme $]-\infty; a)$).

...

Toutes les définitions sont analogues en changeant :
$x \to +\infty$ par $x \to -\infty$ et $x \geqslant M$ par $x \leqslant -M$.

Remarque. En français :

– "Pour tout voisinage V de ℓ (resp. $+\infty$, $-\infty$), il existe un voisinage U de $\pm\infty$ dans I tel que f envoie U dans V ($f(U) \subset V$)."

Ou :

– "Pour que $f(x)$ soit suffisamment proche de ℓ (resp. $+\infty$, $-\infty$), il suffit que x soit suffisamment proche de $\pm\infty$."

Exercice 1. Soit $f :]5, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g :]-\infty, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Écrire à l'aide de quantificateurs :

a) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 4$ b) $f(x) \underset{x\to 5}{\longrightarrow} -\infty$ c) $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d) $g(x) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 1$

(2) Idem avec les négations de ces assertions.

Résolution.

Remarque. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$; on définit aussi :

$$\lim_a f = \ell^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_a f = \ell^-$$

en ajoutant à la condition $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, "et $f(x) \geqslant \ell$" (resp. $f(x) \leqslant \ell$).

1.2. Propriétés.

1.2.1. *Unicité de la limite.*

Propriété 1. (Unicité de la limite)
Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique.

Démonstration. (Esquisse) On procède par l'absurde à partir des définitions. Par exemple pour deux limites réelles ℓ, ℓ' en un réel a, en prenant $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$, on obtient l'existence de $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tels que $\forall x \in I$:

$$\left.\begin{array}{r}\forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \frac{|\ell-\ell'|}{3} \\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha' \implies |f(x)-\ell'| \leqslant \frac{|\ell-\ell'|}{3}\end{array}\right\} \implies \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \min(\alpha,\alpha') \implies |\ell-\ell'| \leqslant |f(x)-\ell| + |f(x)-\ell'|$$

$$\implies |\ell-\ell'| \leqslant \frac{2|\ell-\ell'|}{3}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Mais puisque I est un intervalle il contient des réels x vérifiant $|x-a| \leqslant \min(\alpha,\alpha')$; on en déduit que $1 \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui est absurde. Il resterait $3+4+4 = 11$ cas à traiter, de manière semblable. ■

1.2.2. *Caractérisation séquentielle de la limite.*
Nous avons déjà vu comme théorème dans le chapitre de rappel sur les suites.

Théorème 2. (Théorème séquentiel de composition des limites)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim u_n = a \\ \lim_a f = \ell\end{array}\right\} \implies \lim f(u_n) = \ell$$

Démonstration. (Esquisse) Il y a neuf cas à considérer selon que a, ℓ soient finis ou infinis. Par exemple pour $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; puisque $\lim_{+\infty} f = \ell$, il existe $M > 0$ tel que $x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ $(*)$; pour ce $M > 0$, puisque $\lim u_n = +\infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N_0 \implies u_n \geqslant M$, et donc d'après $(*)$, $n \geqslant N_0 \implies |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$, au-delà duquel $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$; autrement dit, $\lim f(u_n) = \ell$. ■

Il sert soit en application directe à calculer la limite d'une suite, soit à montrer par contraposée qu'une fonction n'admet pas de limite en a.

Exemple. Les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$.

– Pour cos considérer la suite $u_n = n\pi \longrightarrow +\infty$; la suite composée $\cos(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite, et donc d'après le théorème, la fonction cos n'admet aucune limite en $+\infty$.

– Pour sin considérer la suite $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \longrightarrow +\infty$; $\sin(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi)$ et le même argument s'applique.

Ce résultat admet une réciproque :

Théorème 3. (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$; alors : $\lim_a f = \ell$ ssi pour tout suite (u_n) à valeur dans I telle que $\lim u_n = a$, on a $\lim f(u_n) = \ell$.

Démonstration. (Esquisse) Le sens direct, c'est le théorème de composition des limites deja démontré. Pour la réciproque, on montre sa contraposée : si f n'a pas pour limite ℓ en a, alors on construit une suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ ayant pour limite a et telle que $\lim f(u_n) \neq \ell$. Par exemple lorsque $a, \ell \in \mathbb{R}$:

Par définition $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \alpha > 0$, $\exists x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour cet ε, prenons $\alpha = \frac{1}{n} > 0$ et $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leqslant \alpha$ et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$. On construit ainsi une suite (u_n) tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left.\begin{array}{c} a - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant a + \frac{1}{n} \\ \text{et} \\ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_n \longrightarrow a \\ \text{et} \\ f(u_n) \not\to \ell \end{array}\right.$$

■

1.2.3. *Opérations sur les limites.*

Les opérations usuelles sur les fonctions : somme, produit, quotient, puissance, se comportent assez bien avec leurs limites : en étendant naturellement ces opérations sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une puissance de fonctions sont (respectivement) les somme, produit, quotient ou puissance de leurs limites (s'il en est), à l'exception notable des <u>formes indéterminées</u> suivantes :

Formes indéterminées :

$$\overbrace{\infty - \infty}^{\text{somme}} \quad ; \quad \overbrace{0 \times \infty}^{\text{produit}} \quad ; \quad \overbrace{\frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\ell}{0}}^{\text{quotient}} \quad ; \quad \overbrace{1^\infty \quad ; \quad 0^0 \quad ; \quad \infty^0}^{\text{puissance}}$$

Pour le calcul de limite on utilise aussi beaucoup le théorème de limite d'une composée :

Théorème 4. (Limite d'une composée)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soient $a, \ell, L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to \ell} g(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$$

Démonstration. (Esquisse). Il y a 27 cas à considérer selon que a, ℓ, L soient finis ou infinis. Par exemple, pour a, ℓ, L trois réels :

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; puisque $\lim_{x \to \ell} g(x) = L$ il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in J$, $|x - \ell| \leqslant \beta \implies |g(x) - L| \leqslant \varepsilon$ $(*)$.

Pour ce $\beta > 0$, puisque $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \beta$.

Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \beta \underset{f(I) \subset J \text{ et } (*)}{\Longrightarrow} |g(f(x)) - L| \leqslant \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \implies |g \circ f(x) - L| \leqslant \varepsilon$; c'est à dire $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$. ■

1.2.4. *Ordre et limite.*

Dans ce paragraphe, a désigne un point de I ou une borne (finie ou infinie) de I.

Une proposition $P(x)$ dépendant de $x \in I$ est dite vraie au voisinage de a si il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \implies P(x)$.

Théorème 5. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une limite finie en a.
Si, au voisinage de a, $f \leqslant g$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

Démonstration. (Esquisse). On peut procéder par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et en montrant à l'aide de la définition qu'alors lorsque x est suffisamment proche de a, $f(x) > g(x)$. ■

Remarque. Ce théorème ne donne pas l'existence de la limite de f et/ou de g, contrairement aux théorèmes suivants, très utiles pour le calcul de limite.

Théorème 6. (Théorème des gendarmes)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ telles que, au voisinage de a,

$$f \leqslant g \leqslant h$$

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors

$$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a h = \ell$, il existe $\alpha', \alpha'' > 0$ tels que : $|x-a| \leqslant \alpha' \implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x)$ et $|x-a| \leqslant \alpha'' \implies h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.

D'autre part par hypothèse, il existe $\alpha''' > 0$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha''' \implies f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Soit $\alpha = \min(\alpha', \alpha'', \alpha''') > 0$ alors :

$$|x-a| \leqslant \alpha \implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. ■

Théorème 7. (Théorèmes de minoration/majoration)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$. (théorème de minoration)
Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$. (théorème de majoration)

Démonstration. (Esquisse) Cela découle facilement des définitions. ■

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + \cos(e^x)$ admet une limite en $+\infty$ et donner sa valeur.

Résolution.

1.2.5. *Théorème de la limite monotone.*

Théorème 8. (Théorème de la limite monotone)
Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f admet une limite en a et en b. De plus :

- *Si f est croissante :*
  - *Si f est majorée, alors $\lim\limits_{b^-} f = \sup f(]a; b[)$; sinon $\lim\limits_{b^-} f = +\infty$.*
  - *Si f est minorée, alors $\lim\limits_{a^+} f = \inf f(]a; b[)$; sinon $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.*
- *Si f est décroissante :*
  - *Si f est minorée, alors $\lim\limits_{b^-} f = \inf f(]a; b[)$; sinon $\lim\limits_{b^-} f = -\infty$.*
  - *Si f est majorée, alors $\lim\limits_{a^+} f = \sup f(]a; b[)$; sinon $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.*

Démonstration. (Esquisse) La preuve suit le même argument que pour le théorème de la limite monotone des suites, en utilisant la caractérisation en ε des bornes supérieures/inférieures et la définition des limites infinies. ■

C'est un théorème très utile pour démontrer l'existence d'une limite. Il admet de plus le corollaire important suivant.

Corollaire 9.
Soit $f :]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f admet en tout point $x_0 \in I$ une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche, finies ; de plus :

$$\text{si } f \text{ est croissante :} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
$$\text{si } f \text{ est décroissante :} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Exercice 3. Soit une fonction décroissante $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in]0, 1]$, $\arccos(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Que peut-on dire sur l'existence et les valeurs des limites de f en 0 et 1 ?

Résolution.

2. Continuité

2.1. Définition et premières propriétés.

Définition 4. (Fonction continue)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Des opérations sur les limites découle la stabilité de la continuité par les opérations usuelles :

Propriété 10. (Stabilité de la continuité par les opérations usuelles)
Somme, produit, inverse, quotient, composée, de fonctions continues (en un point, sur un intervalle), sont continues (en un point, sur un intervalle) là où elles sont définies.

Il découle facilement des définitions :

Proposition-Définition 5. (Prolongement par continuité)
Si $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \overline{f} : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue sur I ; on l'appelle le prolongement par continuité de f en a (ou sur I).

Exemple. L'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est continue et se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$.

2.2. Théorèmes sur la continuité.

2.2.1. *Théorèmes des valeurs intermédiaires.*

Théorème 11. (Des valeurs intermédiaires)
Soit $a < b$ deux réels ; si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a, b]$.

Remarque. Il peut aussi s'énoncer sous la forme équivalente :

Théorème 12. (T.V.I.)
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Démonstration. Il est facile de voir que le T.V.I. permet d'établir que si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $f(x) = c$ admet au moins une solution sur $[a,b]$ (appliquer le théorème à $x \longmapsto f(x) - c$).
Pour conclure il suffit d'appliquer la caractérisation suivante des intervalles : une partie $D \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ssi $\forall y_0, y_1 \in D$ avec $y_0 < y_1$, tout réel y compris entre y_0 et y_1 est aussi dans D. ■

Le T.V.I. admet comme corollaire utile :

Corollaire 13.
Soit $a < b$ deux réels ; si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $[a,b]$.

Exercice 4. (Un théorème de point fixe)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Résolution.

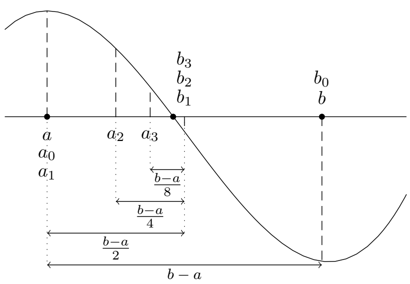
Exercice 5. (Un cas concret)
Un randonneur a parcouru 24 km en 6 h. Montrer qu'il existe une intervalle d'1 h pendant lequel le randonneur a parcouru exactement 4 km.

Résolution.

Une démonstration classique du T.V.I. procède par dichotomie :

Démonstration. (Esquisse) On se place sous les hypothèses du théorème 11. On construit les suites (a_n), $(b_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence :

$$a_0 = a \quad ; \quad b_0 = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} m_n & \text{si } f(m_n) \text{ et } f(a_n) \text{ ont même signe} \\ a_n & \text{sinon} \end{cases}$$
$$b_{n+1} = \begin{cases} m_n & \text{si } f(m_n) \text{ et } f(b_n) \text{ ont même signe} \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$



On démontre facilement par récurrence que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et vérifient :
(1) (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante,
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$
(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signes opposés.

En particulier de (1) et (2) découle que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes et convergent donc vers la même limite $c \in [a,b]$.
Par passage à la limite dans l'inégalité $f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$ provenant de (3) on obtient par continuité de f :

$$[f(c)]^2 \leqslant 0 \implies f(c) = 0.$$

■

La méthode de démonstration présente l'avantage de donner un algorithme de recherche approchée d'une racine :

```python
def dichotomie(f,a,b,eps):
    """Recherche par dichotomie d'une racine de f sur [a,b]
    f doit être continue, a<b et f(a)*f(b)<=0"""
    assert a < b and f(a)*f(b) <= 0
    while b-a > eps:
        m = (a+b)/2        # milieu
        if f(a)*f(m) <= 0:
            b = m  # Dichotomie à gauche
        else:
            a = m  # Dichotomie à droite
    return a, b  # renvoie valeur par defaut et excès à eps près
```

Par exemple pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près :

```
In [1]: dichotomie(lambda x: x**2-2, 1, 2, 1e-6)
Out[1]: (1.4142131805419922, 1.4142141342163086)

In [2]: 2**.5 # Decimales correctes
Out[2]: 1.4142135623730951
```

Remarque. L'algorithme a une complexité en $O\left(\log_2\left(\frac{b-a}{eps}\right)\right)$; en effet, la boucle s'exécute en temps borné $O(1)$, et autant de fois, n, qu'il faut pour que :

$$\frac{b-a}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff 2^n \geqslant \frac{b-a}{\varepsilon} \iff e^{n\ln(2)} \geqslant \frac{b-a}{\varepsilon} \underset{\ln \nearrow}{\iff} n \geqslant \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \times \frac{1}{\ln(2)} = \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

Par exemple avec a et b fixés, pour avoir N décimales grossièrement correctes ($\varepsilon = 10^{-N}$), l'algorithme est linéaire en N puisque $\log_2\left(\frac{b-a}{10^{-N}}\right) = N\log_2(10) + \log_2(b-a)$.

2.2.2. *Théorème des bornes atteintes.*

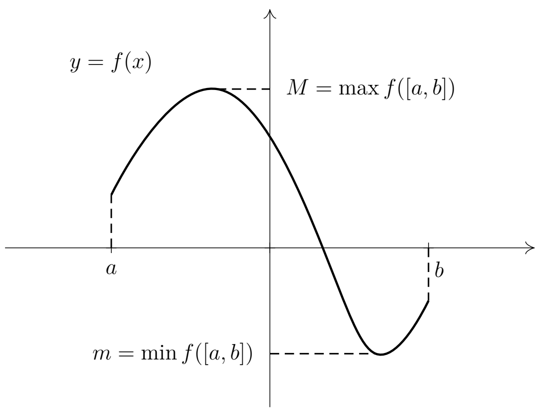
Nous admettrons pour l'instant le résultat suivant. Il s'avère très utile !

Théorème 14. (Des bornes atteintes)
Une application continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Un énoncé plus précis décrit l'image d'un segment $[a,b]$ (*i.e.* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$) par une application continue (attention en général ce n'est pas le segment $[f(a), f(b)]$, à moins que f ne soit croissante) :

Théorème 15. (Image d'un segment par une application continue)
L'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue est un segment $[m,M]$ où :

$$m = \min f([a,b]) = \inf_{[a,b]} f \qquad M = \max f([a,b]) = \sup_{[a,b]} f.$$



Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et continue. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Résolution.

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Résolution.

2.2.3. *Théorème de la bijection.*

Théorème 16. (de la bijection)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.
Alors :

- *f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$*
- *sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.*

Démonstration. (Essentiellement admis) Le seul point non trivial est la continuité de f^{-1} que l'on admet.
La stricte monotonie de f entraîne son injectivité, et donc qu'elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$; d'où l'existence de l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$. Soit $x, x' \in I$; $y = f(x)$, $y' = f(x')$ ssi $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. Alors f est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout $x, x' \in I$, $x \leqslant x' \iff f(x) \leqslant f(x')$ (resp. $x \leqslant x' \iff f(x) \geqslant f(x')$) si et seulement si $\forall y, y' \in J$, $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y') \iff y \leqslant y'$ (resp. $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y') \iff y \geqslant y'$) si et seulement si f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante). ■

Le point essentiel du résultat est la continuité de l'application réciproque d'une application continue. C'est ainsi qu'on peut établir que les fonctions exp (réciproque de ln), Arccos (réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$), Arcsin (réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$) et Arctan (réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$) sont continues.

Exercice 8.
• Donner un exemple d'application non continue qui réalise une bijection entre deux intervalles. Son application réciproque peut-elle être continue ?
• Montrer qu'une application continue sur un intervalle réalise une bijection sur son image si et seulement si elle est strictement monotone.
Pour cela on admettra que pour une application non strictement monotone, il existe $a < b < c$ tel que $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \leqslant f(b)$ (ou $f(a) \geqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(b)$)

Résolution.

3. Dérivabilité

3.1. Définitions et premières propriétés.

Définition 6. (Nombre dérivé ; fonction dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
- *Soit $a \in I$; on appelle taux d'accroissement de f en a l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \tau_a : I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}.$$

On dit que <u>f est dérivable en a</u> lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie quand x tend vers a.
Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et notée $f'(a)$.
Ainsi :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- *Lorsque f est dérivable en tout point de I, on définit sa <u>fonction dérivée</u> :*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Remarque. On définit aussi la notion de nombre dérivée à droite/gauche en a, notés $f'_d(a)$, $f'_g(a)$, en considérant les limites à droite/gauche. On a immédiatement le résultat :

Soit a un point intérieur de I ; f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple. La fonction $x \longrightarrow |x|$ n'est pas dérivable en 0 ; en effet sa dérivée à droite est 1, sa dérivée à gauche -1.

Exercice 9.
Retrouver les domaines de dérivabilité et les valeurs des dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et $x \mapsto \sqrt{x}$.

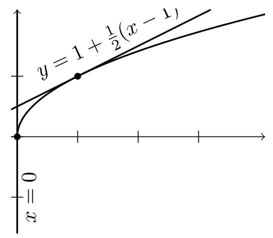
Résolution.

Proposition-Définition 7. (Tangente)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
La courbe représentative de f admet une tangente en a si le taux d'accroissement de f en a a une limite ℓ (finie ou non) quand x tend vers a.

- *Si ℓ est finie, f est dérivable en a et la tangente en a à la courbe représentative de f est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$*
- *Si ℓ est infinie, la tangente en a à la courbe représentative de f est la droite d'équation $x = a$.*

Démonstration. (Esquisse) Cela découle de l'interprétation géométrique du taux d'accroissement en a : c'est la pente de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$; si lorsque $x \to a$, ce taux d'accroissement a une limite, la corde tend vers une droite tangente à la courbe. Aussi f est dérivable en a ssi $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, ce qu'on écrit aussi : $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$; la droite tangente apparaît alors comme la courbe de l'approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a. ■

Exemple. Tangentes à la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 et en 1.



Remarque. La dérivée est géométriquement la pente de la tangente. Les dérivées servent dans l'étude des fonctions pour la recherche des variations de la fonction, des extrema éventuels... mais il convient de rappeler que la dérivée est un outil qui apparait naturellement en physique pour les notions de
— vitesse en cinématique (dérivée de l'espace par rapport au temps)
— vitesse angulaire (dérivée de l'angle par rapport au temps)
— intensité de courant $\left(i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$, etc.

Propriété 17. (Dérivable $\Longrightarrow$ continu)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a (resp. sur I) alors f est continue en a (resp. sur I).

Démonstration. Si f est dérivable en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, et par produit des limite, $f(x) - f(a)$ a pour limite $0 = \ell \times 0$. ■

3.2. Opérations sur les dérivées ; dérivées usuelles.

Propriété 18. (Dérivée d'une somme, produit, quotient,. . .)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

- *$\lambda f + \mu g$ est dérivable en sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.*
- *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
- *Si g ne s'annule pas sur I,*
  - *$\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.*
  - *$\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.*

Remarque. Le résultat est vrai aussi en $a \in I$.

Démonstration. (Esquisse) Découle de la définition, du fait que dérivable $\implies$ continu et des opérations sur les limites. Par exemple :

$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} &= \frac{1}{g(x)g(a)}\,\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)}\,\frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{g(a)^2}\left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right)\end{aligned}$$

■

Propriété 19. (Dérivée d'une composée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g\circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right).$$

Remarque. Le résultat reste vrai en un point (si f est dérivable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a.

Démonstration. (Esquisse)

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} g'(f(a)) \times f'(a)$$

par limite d'une composée, continuité de f et produit des limites. ■

Exercice 10.
Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $g : x \mapsto \sqrt{\cos x}$.

Résolution.

Propriété 20. (Dérivée d'une réciproque)
Soit f une bijection de I vers J. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque. Le résultat reste vrai en tout point $f(a) \in J$ tel que $f'(a) \neq 0$.

Démonstration. (Esquisse) Soit $a, x \in I$ et $b = f(a), y = f(x) \in J$:
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$
par composée et inverse des limites lorsque $f'(a) \neq 0$. ■

Exemples. C'est ce résultat qui permet de calculer les dérivées de exp, Arctan, Arccos, Arcsin ; par exemple :

• exp est la réciproque de ln qui a pour dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall y = \ln(x) \in \mathbb{R},\ \exp'(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y)$$

• Arctan est la réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui a pour dérivée $1 + \tan^2 > 0$; ainsi Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall y = \tan(x) \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Exercice 11.
Soit $f : x \mapsto xe^x$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$. On note f^{-1} la réciproque de cette bijection. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et préciser son nombre dérivé en 0.

Résolution.

3.2.1. *Dérivées usuelles.*

$f(x)$	*Ensemble de définition*	*Ensemble de dérivabilité*	$f'(x)$	*avec*
x^α	$\begin{cases}\mathbb{R} & si\ \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^* & si\ \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & si\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\end{cases}$	$\begin{cases}\mathbb{R} & si\ \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^* & si\ \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & si\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\end{cases}$	$\alpha \times x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x}$	$\begin{cases}\mathbb{R}_+ & si\ n\ pair \\ \mathbb{R} & si\ n\ impair\end{cases}$	$\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & si\ n\ pair \\ \mathbb{R}^* & si\ n\ impair\end{cases}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{n \times x}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	
a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \times a^x$	$a \in \mathbb{R}_+^*$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sh	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2(x)$ $= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathrm{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

3.3. **Théorèmes sur la dérivabilité.**

3.3.1. *Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur.*

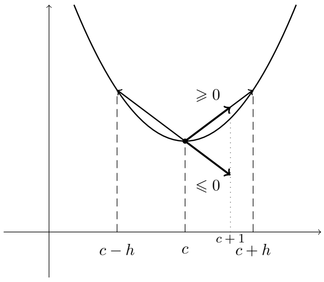
Théorème 21. (Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, a un point intérieur de I (i.e. pas une borne)
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

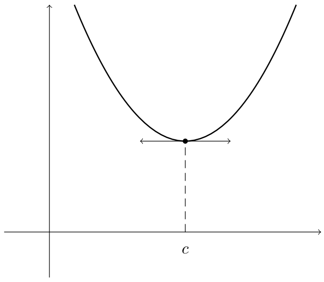
Remarque. Attention :

• La réciproque est fausse en général. Par exemple, la dérivée de $f : x \mapsto x^3$ s'annule en 0 , mais f n'admet pas d'extremum local en 0.

• C'est faux pour un extremum qui n'est pas un point intérieur ; par exemple sur $[0, 1]$, la fonction $x \longmapsto x$ admet des extremums en 0 et 1 tandis que sa dérivée ne s'y annule pas.

Démonstration. Lorsque a est un extremum le taux d'accroissement en a prend des signes opposés sur un voisinage de a selon que $x < a$ ou $x > a$; en effet, le fait que a soit un extremum entraîne que sur un voisinage de a, $f(x) - f(a)$ garde un signe constant, tandis que $x - a$ change de signe selon que x soit à gauche ou droite de a. Par passage à la limite, $f'(a)$ est à la fois positif et négatif ; il est donc nul. ■

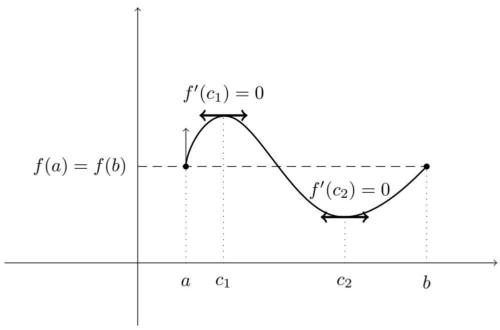




3.3.2. *Théorème de Rolle.*

Théorème 22. (Théorème de Rolle)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. (Esquisse) D'après le théorème des bornes atteintes f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Soit f est constante, dans quel cas sa dérivée est nulle partout, soit le fait que $f(a) = f(b)$ implique que l'un des extremums est nécessairement atteint sur l'intérieur $]a, b[$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de condition nécessaire d'un extremum en un point intérieur pour obtenir un point intérieur c tel que $f'(c) = 0$. ■



Exercice 12. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Résolution.

3.3.3. *Théorèmes des accroissements finis.*

Théorème 23. (Égalité des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c)$.

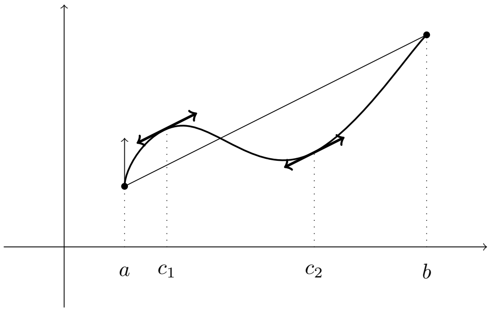
Démonstration. (Esquisse) On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\phi : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

en effet $\phi(a) = f(a) = \phi(b)$. On obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ soit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Remarque. Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis sont des résultats équivalents : chacun des deux se déduit directement de l'autre. Avec l'égalité des accroissements finis, le théorème de Rolle apparaît comme un simple cas particulier lorsque $f(a) = f(b)$. Dans un exercice, l'égalité des accroissements finis peut toujours se substituer au théorème de Rolle.

Graphiquement, l'égalité des accroissements finis apparaît comme une version "oblique" du théorème de Rolle :



En cinématique, si un mobile se déplace entre les temps t_0 et t_1 avec une vitesse moyenne v alors a au moins un instant dans $]t_0, t_1[$ sa vitesse instantanée sera aussi v.

Exercice 13. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]\,t, t+1\,[$ tel que : $\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$.

Résolution.

Théorème 24. (Inégalité des accroissements finis)
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I telle que

$$|f'| \leqslant M$$

sur I. Alors

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

(on dit que f est M-lipschitzienne).

Démonstration. Sur I, $-M \leqslant f' \leqslant M$ $(*)$.
Supposons $x \neq y$ car sinon l'inégalité revient à $0 \leqslant 0$. D'après l'égalité des accroissements finis appliqué sur $[\min(x, y), \max(x, y)]$

$$\exists c \in I, \;\; f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

et d'après $(*)$:

$$-M \times (x - y) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M \times (x - y)$$

donc : $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. ■

Exercice 14. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$.

Résolution.

3.3.4. *Monotonie et signe de la dérivée.*

Théorème 25. (Monotonie et signe de la dérivée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors

- *f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$*
- *f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$*

De plus, si f est continue sur I et dérivable sur I sauf en un nombre fini de points alors :

- *Si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I*
- *Si $f' < 0$ sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. (Esquisse) Le sens direct des 3 premiers points est évident : si par exemple f est croissante, tous les taux d'accroissement sont positifs, et donc leur limite aussi.

Pour établir la réciproque des trois premiers points, et les deux derniers points lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, on applique l'égalité des accroissements finis. Pour finir la démonstration des deux derniers points, on procède par récurrence après avoir remarqué que si une fonction définie sur $]a,c[$ est strictement croissante/décroissante sur $]a,b[$ ainsi que sur $]b,c[$, alors elle l'est aussi sur $]a,c[$. ■

Remarque. Attention ce n'est vrai que sur un intervalle. Par exemple $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, à dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ strictement négative ; f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ (puisque $-1 < 1$ et $f(-1) = \frac{1}{-1} < \frac{1}{1} = f(1)$).

Exercice 15.
- Soit $x \in [-1,1]$; simplifier $f(x) = \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$; simplifier $g(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Résolution.

3.3.5. *Théorème de la limite de la dérivée.*

Théorème 26. (Théorème de la limite de la dérivée)
Soit $a \in I, f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$. Soit ℓ réel ou infini. Si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. (Esquisse) S'obtient en appliquant l'égalité des accroissements finis sur des intervalles de la forme $[x_1, a]$, $[a, x_2]$, puis faire tendre x_1 et x_2 vers a. ■

Remarque. Le cas où ℓ est réel est le plus important. Il permet de conclure sur la dérivabilité d'une fonction en un point sans avoir à étudier la limite du taux d'accroissement en ce point.

En général :

(1) On sait qu'une fonction f continue sur I est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et on connaît l'expression de f' sur $I\backslash\{a\}$

(2) On cherche si cette expression a une limite ℓ en a

(3) Si cette limite existe et est réelle, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Donc f est dérivable et f' est continue en a.

Exercice 16. Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Résolution.

4. Dérivées d'ordre supérieur et fonction de classe $\mathscr{C}^k$

4.1. Définitions et exemples.

Définition 8. (Dérivées successives)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit (en cas d'existence) les dérivées successives de f par récurrence par

- $f^{(0)} = f$
- *Pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$*

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \longmapsto x^n$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

Résolution.

Définition 9. (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$, ou autrement dit lorsque f admet des dérivées d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque. Par définition si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors f est n fois dérivable sur I. Puisque la dérivabilité entraîne la continuité, si f est $(n+1)$ fois dérivable alors f est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Ainsi en notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R}) = \left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\right\}$$

on a les inclusions :

$$\boxed{\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathscr{D}^1(I, \mathbb{R}) \supset \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}) \supset \mathscr{D}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \supset \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}).}$$

Toutes ces inclusions sont strictes :

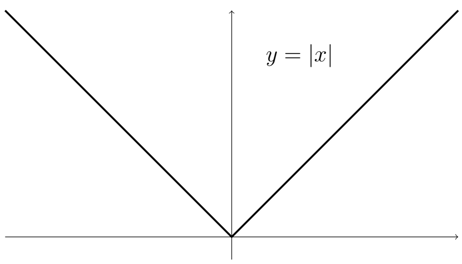
> *Être de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ est strictement plus fort qu'être $(n+1)$ fois dérivable, qui lui-même est strictement plus fort qu'être de classe $\mathscr{C}^n$.*

On parle de plus ou moins grande régularité de la fonction ; une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est parfois dite "lisse".

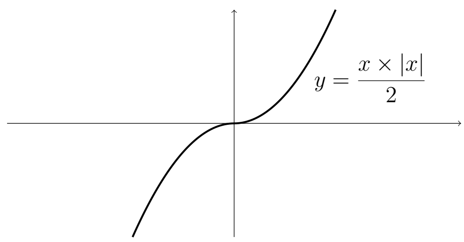
Exemple. Application de classe $\mathscr{C}^n$ qui n'est pas $(n+1)$ fois dérivable.
L'application $x \longmapsto |x|$ est continue et non dérivable. Ainsi l'inclusion $\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte. Puisque l'application valeur absolue est continue elle admet des primitives. En considérant sa primitive sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto \frac{x \times |x|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

on obtient une application dérivable à dérivée continue (*i.e* de classe $\mathscr{C}^1$) qui n'est pas deux fois dérivable. Ainsi l'inclusion $\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte. En prenant des primitives successives, on obtient des exemples montrant que l'inclusion $\mathscr{D}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte pour tout $n \in \mathbb{R}$.



$x \longmapsto |x|$ est $\mathscr{C}^0$ et non $\mathscr{D}^1$.



Sa primitive est $\mathscr{C}^1$ et non $\mathscr{D}^2$.

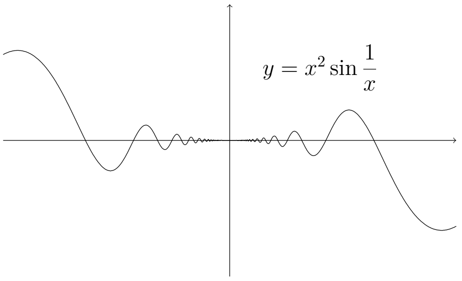
Exercice 18. Soit :

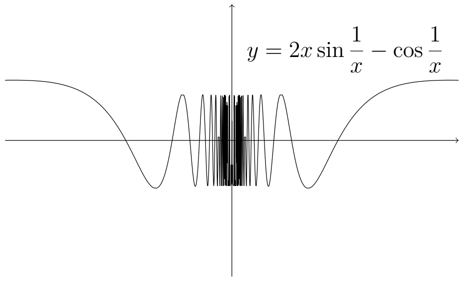
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Résolution.

Cet exemple montre que l'inclusion $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte.





$x \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée n'est pas continue en 0.

En prenant des primitives successives (puisque f est continue), on en déduirait des exemples d'applications n fois dérivables qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inclusion $\mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stricte.

4.2. Théorèmes.

Théorème 27. (Stabilité par combinaison linéaire, produit, quotient, composition) *Soient f, g des application n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, partout où elles sont définies :*

$$\lambda f + \mu g, \quad f \times g, \quad \frac{f}{g}, \quad g \circ f$$

sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en appliquant la stabilité de la continuité et de la dérivabilité par ces opérations. ■

En ce qui concerne la dérivée n-ième d'un produit, on dispose de la formule de Leibniz.

Théorème 28. (Formule de Leibniz) *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-fois dérivables ($n \in \mathbb{N}$). Alors :*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur n, en appliquant la dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit et la formule de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. ■

Exercice 19. Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^2 e^{3x}$.

Résolution.

Théorème 29. ($\mathscr{C}^k$-Difféomorphisme) *La réciproque d'une fonction bijective de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et dont la dérivée ne s'annule pas, est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $f(I)$.*

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$ c'est le théorème de la bijection (une fois montré qu'une bijection continue définie sur un intervalle est nécessairement strictement monotone (cf. exercice page 9).

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n, et soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ avec f' ne s'annulant par sur I. Par dérivation de l'application réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ de dérivée :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Or par hypothèse $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. Par composition et quotient, $(f^{-1})'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J et donc f^{-1} est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur J. L'assertion reste ainsi vraie au rang $n + 1$. ∎

5. Analyse asymptotique

Dans toute cette partie, I est un intervalle non vide et non réduit à un point, et a est un point de I ou une borne de I, finie ou infinie.

5.1. Relations de comparaisons.

5.1.1. *Relations de domination et de prépondérance.*

Définition 10. (Domination, prépondérance)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que :

- *f est dominée par g au voisinage de a (noté $f \underset{a}{=} O(g)$) lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*
- *f est négligeable devant g au voisinage de a (noté $f \underset{a}{=} o(g)$) lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$; on dit aussi que g est prépondérante devant f au voisinage de a.*

On obtient facilement à partir des définitions les propriétés suivantes :

Propriété 30.

- *Négligeable entraîne dominé :*
$$f \underset{a}{=} o(g) \implies f \underset{a}{=} O(g)$$
- *Transitivité :*
$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \implies f \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h) \implies f \underset{a}{=} o(h)$$
- *Somme et différence :*
$$f \underset{a}{=} O(h) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \implies f \pm g \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} o(h) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h) \implies f \pm g \underset{a}{=} o(h)$$
- *Multiplication par un scalaire $\lambda \neq 0$:*
$$f \underset{a}{=} O(g) \implies \lambda f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } f \underset{a}{=} O(\lambda g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \implies \lambda f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } f \underset{a}{=} o(\lambda g)$$

Exemple. La croissance comparée s'énonce à l'aide de la relation de prépondérance :

(Croissance comparée)
$\forall \alpha, \beta > 0$:

$$\ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \qquad ; \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$
$$|\ln(x)|^\alpha \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \qquad ; \qquad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$$

5.1.2. *Équivalence.*

Définition 11. (Équivalence de fonctions)
Soient $f, g : I \longrightarrow R$; on dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ si :

$$f(x) = g(x) \times (1 + \varepsilon(x)) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Lorsque g ne s'annule pas sur un voisinage de a c'est équivalent à :

$$\frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \text{ ou encore } f \underset{a}{=} g + o(g).$$

Exemple. Une fonction polynôme :

$$P(x) = \sum_{m}^{n} a_k x^k$$

• est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré : $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ si $a_m \neq 0$.
• est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré : $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ si $a_n \neq 0$.

On dispose des équivalents usuels, obtenus à l'aide des limites usuelles en 0 et du théorème de limite d'une composée :

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $u \underset{a}{\longrightarrow} 0$:

$$\sin(u) \underset{a}{\sim} u \qquad \tan(u) \underset{a}{\sim} u \qquad 1 - \cos(u) \underset{a}{\sim} \frac{u^2}{2}$$
$$\ln(1+u) \underset{a}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{a}{\sim} u$$
$$\sqrt{1+u} - 1 \underset{a}{\sim} \frac{u}{2} \qquad \forall \alpha > 0, \quad (1+u)^\alpha - 1 \underset{a}{\sim} \alpha u$$

Il vient facilement avec la définition que :

Propriété 31. (Relation d'équivalence)
Être équivalent en a est une relation :
- *Réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$*
- *Symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$*
- *Transitive : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$.*

C'est ce qu'on appelle être une relation d'équivalence.

Pour le calcul d'équivalents on peut appliquer les propriétés suivantes :

Propriété 32.
• *Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors :*

$$f \underset{a}{\sim} \ell$$

• *Multiplication par $\lambda \neq 0$:*

$$\forall \lambda \neq 0, \; f \underset{a}{\sim} g \implies (\lambda.f) \underset{a}{\sim} (\lambda.g)$$

• *Inverse :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \left(\frac{1}{f}\right) \underset{a}{\sim} \left(\frac{1}{g}\right)$$

• *Puissance :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall p \in \mathbb{Z}, \; f^p \underset{a}{\sim} g^p$$

Si de plus f et f sont strictement positives au voisinage de a :

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$$

- *Valeur absolue :*
$$f \underset{a}{\sim} g \implies |f| \underset{a}{\sim} |g|$$
- *Produit :*
$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$$
- *Quotient : si f_2, g_2 ne s'annulent pas sur un voisinage de a :*
$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \implies \left(\frac{f_1}{f_2}\right) \underset{a}{\sim} \left(\frac{g_1}{g_2}\right)$$

Démonstration. (Esquisse) Découlent facilement de la définition par composition, produit et quotient des limites. ∎

Remarque. On ne compose pas les équivalents !

On n'additionne pas les équivalents ! Pour obtenir un équivalent d'une somme utiliser $f = g + o(g)$ plutôt que $f \sim g$.

Le résultat fondamental sur les équivalents est :

Propriété 33. ($f \underset{a}{\sim} g \implies$ même limite en a et même signe au voisinage de a)

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. Alors :
- *f et g sont de même signe au voisinage de a.*
- *Si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g tend vers la même limite que f en a.*

Démonstration. Si $f = g(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 0$, alors sur un voisinage de a $(1+\varepsilon) > 0$ et donc f et g ont même signe. Et puisque $1 + \varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 1$, par produit des limites, f et g ont même limite (éventuelle). ∎

On dispose aussi d'une "version équivalents" du théorème des gendarmes :

Propriété 34. (Équivalent par encadrement)
Si au voisinage de a :
$$f \leqslant g \leqslant h$$
et si $f \underset{a}{\sim} u$ et $h \underset{a}{\sim} u$ alors $g \underset{a}{\sim} u$.

Démonstration. De $f \underset{a}{=} u(1+\varepsilon)$ et $h \underset{a}{=} u(1+\varepsilon')$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \underset{a}{\longrightarrow} 0$ découle $g - u = u\varepsilon''$ avec $\varepsilon'' \underset{a}{\longrightarrow} 0$. ∎

Exercice 20. Calculer les limites de :
a) $\dfrac{\sin x \ln\left(1+x^2\right)}{x \tan x}$ en 0
b) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0
c) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0
d) $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

Résolution.

5.2. **Développement limité.**

5.2.1. *Définition et premières propriétés.*

Définition 12. (Développement limité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a lorsqu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\textit{partie régulière du } DL_n(a)} + o(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o(x-a)^n$$

Remarques.
• Si f admet un $DL_n(a)$ alors f admet un $DL_p(a)$ pour tout $p \in [\![0, n]\!]$. En effet pour tout $m > p$, $(x-a)^m \underset{a}{=} o\left((x-a)^p\right)$.
• Lorsque un $DL_n(a)$ de f existe, il est unique ; autrement on aurait $(x-a)^p \underset{a}{=} o\left((x-a)^n\right)$ avec $p \leqslant n$.

Propriété 35. $DL_0 \iff$ continue ; $DL_1 \iff$ dérivable
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :
- *f est continue en a si et seulement si f admet un DL d'ordre 0 en a.*
- *f est dérivable en a si et seulement si f admet un DL d'ordre 1 en a.*

Démonstration. f admet un $DL_0(a)$ ssi $f \underset{a}{=} a_0 + o(1) \iff \lim_a f = a_0$ ssi f est continue en a puisque f est par hypothèse définie en a ; en particulier $f(a) = a_0$.
f admet un $DL_1(a)$ ssi $f \underset{a}{=} f(a) + a_1(x-a) + o(x-a) \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{\longrightarrow} a_1$ ssi f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$. ∎

Remarque. Attention, le résultat ne se généralise pas aux ordres supérieurs ; par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un $DL_2(0)$ puisque $f(x) \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Propriété 36. Un DL_a non nul fournit un équivalent
Le monôme non nul de plus bas degré d'un DL_a de f est un équivalent de f en a.

Démonstration.

$$\begin{aligned} & f(x) \underset{a}{=} a_m(x-a)^m + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ \implies & f(x) \underset{a}{=} a_m(x-a)^m + o\left((x-a)^m\right) \implies f(x) \underset{a}{\sim} a_m(x-a)^m \qquad \text{si } a_m \neq 0 \end{aligned}$$

∎

5.2.2. *Formules de Taylor.*

Théorème 37. (Formule de Taylor-Young)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f admet pour développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

Remarque. Une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet donc un DL_n en a, mais la réciproque est fausse en général, pour $n \geqslant 1$.

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur n.
(I) Pour $n = 0$ c'est évident.
(H) Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ alors $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f'(t) &\underset{a}{=} f'(a) + f''(a)(t-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(t-a)^n + o\left((t-a)^n\right) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \times \eta(t) \end{aligned}$$

avec $\eta(t) \underset{a}{\longrightarrow} 0$. On intègre en a et x :

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt \\ \Longrightarrow f(x) &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt \end{aligned}$$

et on montre, à l'aide de la définition que $\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} \times \displaystyle\int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. ■

Lorsque f est un peu plus régulière (de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) on peut préciser la valeur exacte du reste. C'est la formule de Taylor avec reste intégral (ou formule de Taylor-Laplace). Elle est non-exigible, mais elle permet de démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui elle est au programme.

Théorème 38. (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.
Alors :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration. Par récurrence sur n.
(I) La formule devient $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ qui est évidemment vrai.
(H) Supposons $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$; par hypothèse de récurrence :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad \left|\begin{array}{ll} u = f^{(n+1)}(t) & u' = f^{(n+2)}(t) \\ v = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} & v' = \dfrac{(x-t)^n}{n!} \end{array}\right.$$

On effectue une intégration par partie sur le reste intégral R_n :

$$R_n = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

qui montre que l'assertion reste vraie au rang $n+1$. ■

Corollaire 39. (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Notons :

$$M_{n+1} = \max_{t \in I} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Découle de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| = \left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right| \leqslant \int_a^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt &\leqslant M_{n+1} \times \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \\ &\leqslant M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

■

5.2.3. *Opérations sur les DLs.*
Les développements limités, au contraire des équivalents, se comportent très bien avec les opérations : on peut ajouter, multiplier, composer, etc. des *DL*.

Pour énoncer les résultats on notera $Tronc_p$ la troncature à l'ordre p d'une partie régulière d'un DL d'ordre plus grand :

Si $p \in [\![0, n]\!]$:
$$Tronc_p\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-a)^k.$$

Propriété 40. (Combinaison linéaire et produit de DL)
Si f et g admettent des $DL_n(a)$ de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$:
$$f(x) \underset{a}{=} Pn(x) + o\left((x-a)^n\right)$$
$$g(x) \underset{a}{=} Qn(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

- *$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ admet pour $DL_n(a)$:*
$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x) \underset{a}{=} \lambda \cdot P_n(x) + \mu \cdot Q_n(x) + o\left((x-a)^n\right)$$
- *$f \times g$ admet pour $DL_n(a)$:*
$$(f \times g)(x) \underset{a}{=} Tronc_n\Big(P_n(x) \times Q_n(x)\Big) + o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration. (Esquisse) On fait la combinaison linéaire et le produit des DLs ; pour le produit, on tient compte du fait que $\deg(P_n \times Q_n) = \deg(P_n) + \deg(Q_n) = 2n$ et que si $q > n$ alors $(x-a)^q = o\left((x-a)^n\right)$. ∎

Même si le résultat sur la composition des DLs ne figure pas explicitement au programme, il faut savoir l'appliquer dans les calculs.

Propriété 41. (Composition de DL)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$; si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $P_n(x)$ et si g admet un $DL_n(f(a))$ de partie régulière $Q_n(x)$ alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(a)$:
$$g \circ f(x) \underset{a}{=} Tronc_n\Big(Q_n \circ P_n\Big)(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration. On procède comme dans le cas d'un produit, $\deg(Q_n \circ P_n) = \deg(Q_n) \times \deg(P_n) = n^2$ en utilisant que si $q > n$ alors $(x-a)^q = o\left((x-a)^n\right)$. ∎

Propriété 42. (Primitivation de DL)
Soit $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in I$; si f' admet le $DL_n(a)$:
$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$
alors f admet le $DL_{n+1}(a)$:
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Démonstration. (Esquisse) On intègre le $DL_n(a)$ de $f'(t)$ entre a et x :
$$f'(t) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(t-a)^k + (t-a)^n\eta(t) \qquad \text{avec } \eta(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$$
$$\Longrightarrow f(x) - f(a) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \int_a^x (t-a)^n\eta(t)dt$$
et on montre sans peine que $\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}\displaystyle\int_a^x (t-a)^n\eta(t)dt \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. ∎

Pour dériver un DL il faut prendre garde que si f admet un $DL_n(a)$ il n'est pas toujours vrai que f' admette un $DL_{n-1}(a)$.

Contre-exemple $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ est dérivable et n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ (cf. page 19) ; ainsi f admet un $DL_1(0)$ (car dérivable) mais f' n'admet pas de $DL_0(0)$ (car non continue).

Pour obtenir un résultat il faut donc plus d'hypothèse :

Propriété 43. Dérivation de DL
Si $f : I \longrightarrow R$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et admet le DL_n en $a \in I$:

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f' admet le $DL_{n-1}(a)$:

$$f'(x) \underset{a}{=} a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right)$$

Démonstration. Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ alors $f' \in \mathscr{C}^{n-1}(I,\mathbb{R})$ et d'après Taylor-Young, f' admet donc un $DL_{n-1}(a)$ dont les coefficients se déduisent du $DL_n(a)$ de f, par exemple, à l'aide de la formule de primitivation. ■

Propriété 44. Inverse de DL_n
Si f admet un $DL_n(a)$ et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet aussi un $DL_n(a)$.

Démonstration. (Esquisse) S'obtient par composition avec un $DL_n(f(a))$ de $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui existe puisque l'application inverse est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. ■

Dans la pratique le DL d'un inverse (resp. ou d'un quotient) s'obtient par composition (resp. et produit) à l'aide du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1\pm x}$.

Exemple. $DL_3(0)$ de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ (on utilise les DL usuels qui suivent) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\
& \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\
& \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) && \text{par composition} \\
& \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
\Longrightarrow\ & \tan(x) \underset{0}{=} Tronc_3\Big(\Big(1 + \frac{x^2}{2}\Big) \times \Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)\Big) + o(x^3) && \text{par produit} \\
& \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
& \tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + (x^3)
\end{aligned}$$

5.2.4. *Développements limités usuels.*

(Développements limités usuels)

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\displaystyle \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\displaystyle \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$
- $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

Démonstration. (Esquisse) Le DL_n de $\frac{1}{1-x}$ se déduit de la factorisation $(1-x^{n+1}) = (1-x)(1+x+\cdots+x^n)$. En l'appliquant en $-x$ on obtient celui de $\frac{1}{1+x}$, puis par primitivation celui de $\ln(1+x)$.

Les DL de exp, cos, sin, $(1+x)^\alpha$ s'obtiennent grâce à la formule de Taylor-Young.

Le DL d'Arctan s'obtient par primitivation de celui de $\frac{1}{1+x^2}$ lui-même obtenu par composition à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$.

Le DL de tan s'obtient par quotient, et ceux de ch et sh par combinaison linéaire à partir de celui de exp. ■

Remarque. Il est bon de connaître les premières valeurs du DL :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots$$

Pour s'aider à mémoriser ces formules, ou plus généralement dans le calcul de $DL(0)$, se rappeler que :

Propriété 45. **($DL(0)$ d'une fonction paire/impaire)**
Pour une fonction paire (resp. impaire) un $DL(0)$ n'a que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Démonstration. Si $f(-x) = (-1)^\varepsilon f(x)$ (avec $\varepsilon = 0$ ou 1 selon que f est pair/impair) alors :

$$0 = f(-x) - (-1)^\varepsilon f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - (-1)^{k+\varepsilon}\right) a_k x^k + o(x^n)$$

Or par unicité du DL : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\left(1-(-1)^{k+\varepsilon}\right) a_k = 0$, or :

$$\left(1-(-1)^{k+\varepsilon}\right) = 0 \text{ ssi } k+\varepsilon \text{ est impair} \implies \begin{cases} \text{si } \varepsilon = 0,\ a_k = 0 \text{ pour tout } k \text{ impair} \\ \text{si } \varepsilon = 1,\ a_k = 0 \text{ pour tout } k \text{ pair} \end{cases}$$

■

Exercice 21. Donner le développement limité en 0 des fonctions :
a) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
b) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
c) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

Résolution.