Chapitre 1
Révisions sur les réels et les suites

https://www.jean-philippe-preaux.fr

Table des matières

1. Rappels préliminaires sur les réels

1.1. Valeur absolue.

Définition 1. (Valeur absolue)
La valeur absolue d'un nombre réel x est le nombre réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Principales propriétés :

Propriété 1.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0, \quad |-x| = |x| \quad$ *et* $\quad (|x| = 0 \iff x = 0)$.
- *La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues :*
$$|x \times y| = |x| \times |y|$$
- *Inégalité triangulaire :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$
- $\forall r \geqslant 0,\ \forall (x, a) \in \mathbb{R}^2,$
$$|x - a| \leqslant r \iff a - r \leqslant x \leqslant a + r$$

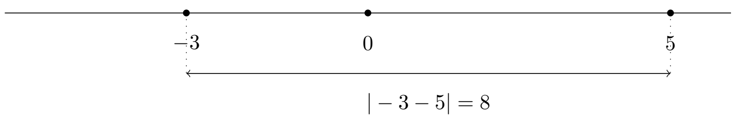
Remarque. Dans l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue, une des deux inégalités est en fait une égalité :
– celle de droite lorsque x et y sont de même signe.
– celle de gauche lorsque x et y sont de signes opposés.

De l'inégalité de droite (la plus couramment utilisée) découle facilement par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$
Avec égalité si et seulement si tous les x_k ont même signe.

Définition 2. (Distance sur la droite réelle)
La distance entre 2 réels x et y est le réel positif $|x-y|$.

Exemple.



Propriété 2. *La distance entre deux réels satisfait les propriétés suivantes :*
- $|x-y| = 0 \iff x = y$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$ *(inégalité triangulaire).*

1.2. Partie entière.

Proposition-Définition 3. (Partie entière)
Soit x un réel. La partie entière de x, notée $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif vérifiant :
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Démonstration. (Esquisse) L'existence de la partie entière découle de l'existence d'une borne supérieure pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée (voir plus loin). La partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x est la borne supérieure de $\mathbb{Z} \cap]-\infty; x]$. Et il s'avère que pour une partie de $\mathbb{Z}$ une borne supérieure est toujours un maximum. ∎

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $\{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = n\} = [n, n+1[$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ (c'est la partie fractionnaire de x, notée souvent $\{x\}$).

Exercice 1. Montrer que tous réels x, y, on a :
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Résolution.

Exercice 2. Notons $\tau(k)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier k. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Résolution.

1.3. **Bornes supérieures et inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$.**

Définition 4. (Partie majorée, minorée, bornée, maximum, minimum)
Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- *$\mathscr{A}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{A}, x \leqslant M$. Un tel réel M est appelé un majorant de $\mathscr{A}$.*
- *$\mathscr{A}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{A}, x \geqslant m$. Un tel réel m est appelé un minorant de $\mathscr{A}$.*
- *$\mathscr{A}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. Celà équivaut à :*
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{A},\ |x| \leqslant M$$
- *Un majorant de $\mathscr{A}$ qui est aussi élément de $\mathscr{A}$ est maximum de $\mathscr{A}$.*
- *Un minorant de $\mathscr{A}$ qui est aussi élément de $\mathscr{A}$ est minimum de $\mathscr{A}$.*

Remarque. Lorsqu'il existe un minimum est unique :
En effet soient m_1, m_2 deux minimums de $\mathscr{A}$: $(m_2 \in \mathscr{A} \implies m_1 \leqslant m_2)$ et $(m_1 \in \mathscr{A} \implies m_2 \leqslant m_1)$; donc $m_1 = m_2$. Ainsi on parle du minimum ou *plus petit élément*. De même le maximum lorsqu'il existe est unique, et on parle du maximum ou *plus grand élément*.

Proposition-Définition 5. (Borne supérieure)
Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de $\mathscr{A}$, notée $\sup \mathscr{A}$, est le plus petit majorant de $\mathscr{A}$.

L'existence d'une borne supérieure pour une partie majorée est une caractéristique fondamentale du corps des réels (que nous admettons avec sa construction) : l'ensemble des majorants de A admet un minimum.

On définit de manière semblable la borne inférieure d'un ensemble non vide minoré :

Proposition-Définition 6. (Borne inférieure)
Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. La borne inférieure de $\mathscr{A}$, notée $\inf \mathscr{A}$, est le plus grand minorant de $\mathscr{A}$.

Remarque. Si $\mathscr{A}$ admet un plus grand élément alors $\sup \mathscr{A} = \max \mathscr{A} =$ **le plus grand élément**.

Exemple. Où il n'y a pas de plus grand élément :
$$[0,1[\quad ; \quad \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Remarque. Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- $\mathscr{A}$ est majoré ?
  - ↳ Si NON : $\mathscr{A}$ n'est pas majoré ; $\mathscr{A}$ n'a ni maximum, ni borne supérieure.
  - ↳ Si OUI : $\mathscr{A}$ est majoré ; $\mathscr{A}$ admet une infinité de majorants et une unique borne supérieure notée $\sup \mathscr{A}$. Dans ce cas :

- $\sup \mathscr{A} \in \mathscr{A}$?
  ↳ Si OUI : $\mathscr{A}$ admet aussi un maximum et $\max \mathscr{A} = \sup \mathscr{A}$.
  ↳ Si NON : $\mathscr{A}$ n'admet pas de maximum.

- $\mathscr{A}$ est minoré ?
  ↳ Si NON : $\mathscr{A}$ n'est pas minoré ; $\mathscr{A}$ n'a ni minimum, ni borne inférieure.
  ↳ Si OUI : $\mathscr{A}$ est minoré ; $\mathscr{A}$ admet une infinité de minorants et une unique borne inférieure notée $\inf \mathscr{A}$. Dans ce cas :
  - $\inf \mathscr{A} \in \mathscr{A}$?
    ↳ Si OUI : $\mathscr{A}$ admet aussi un minimum et $\min \mathscr{A} = \inf \mathscr{A}$.
    ↳ Si NON : $\mathscr{A}$ n'admet pas de minimum.

Puisque la borne supérieure de $\mathscr{A}$ est le plus petit des majorants de $\mathscr{A}$, majorer la borne supérieure revient à majorer tous les éléments de $\mathscr{A}$; c'est la propriété utile suivante :

Propriété 3. *Soit $s \in \mathbb{R}$. Si $\mathscr{A}$ est majorée alors $\sup \mathscr{A} \leqslant s \Leftrightarrow \forall a \in \mathscr{A}, a \leqslant s$.*

On a la caractérisation suivante de la borne supérieure/inférieure ; c'est une simple reformulation "en epsilon" de la définition, mais elle permet d'établir un lien avec la convergence de suite.

Théorème 4. Caractérisation de la borne supérieure/inférieure

$$a = \sup \mathscr{A} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathscr{A}, \quad x \leqslant a & \text{(i.e. } a \text{ est majorant de } \mathscr{A}) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathscr{A}, \quad x > a - \varepsilon & \text{(i.e. } a - \varepsilon \text{ n'est pas majorant de } \mathscr{A}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathscr{A}, & x \leqslant a \\ \exists\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, & a = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \end{cases}$$

$$b = \inf \mathscr{A} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathscr{A}, \quad x \geqslant b & \text{(i.e. } b \text{ est minorant de } \mathscr{A}) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathscr{A}, \quad x < b + \varepsilon & \text{(i.e. } b + \varepsilon \text{ n'est pas minorant de } \mathscr{A}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in \mathscr{A}, & x \geqslant b \\ \exists\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, & b = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \end{cases}$$

Cette caractérisation est très utile pour déterminer la borne supérieure/inférieure.

Exercice 3. Soit $\mathscr{A} = \left\{ \dfrac{n}{2n+1} \ ;\ n \in \mathbb{N} \right\}$; déterminer, s'ils existent, $\sup \mathscr{A}$, $\inf \mathscr{A}$, $\max \mathscr{A}$ et $\min \mathscr{A}$.

Résolution.

Exercice 4. Montrer que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée et incluse dans $\mathbb{Z}$ admet un maximum.
En déduire une preuve de l'existence de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ pour chaque réel x.

Résolution.

2. Suites numériques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.1. Définitions.

Définition 7. (Suite à valeurs dans $\mathbb{K}$)

- *Une suite de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$; on peut la noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ ou plus simplement (u_n) ; u_n désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite, c'est un élément de $\mathbb{K}$.*
- *L'ensemble des suites sur $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*
- *Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit les lois de compositions internes et externes suivantes :*

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$
$$(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$$
$$\lambda.(u_n) = (\lambda.u_n)$$

Remarque. On peut définir aussi une suite indexée par n'importe quelle partie infinie de $\mathbb{N}$; le plus souvent $\mathbb{N}^*$. Tous les résultats seront énoncés pour des suites indexées par $\mathbb{N}$ mais restent valables en toute généralité.

Définition 8. (Suites extraites)
Soit (u_n) une suite pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée suite extraite de (u_n).

Définition 9. (Suite convergente)
Une suite (u_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que la suite est convergente et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Remarques.

• En langage courant : pour tout voisinage V de ℓ, il existe un rang à partir duquel $u_n \in$ V.

• L'utilisation dans la définition d'inégalité large ou stricte est équivalente sauf pour $\forall\varepsilon > 0$ qui ne peut pas être changé en $\forall\varepsilon \geqslant 0$ (autrement on ne considérerait que les suites stationnaires à partir d'un certain rang).

• Lorsque $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en posant $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$, $u_n = a_n + ib_n$ et (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ ssi (a_n) converge vers $a = \mathrm{Re}(\ell)$ et (b_n) converge vers $b = \mathrm{Im}(\ell)$.

Définition 10. (Suite divergente)
Une suite est dite divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.
Avec des quantificateurs la divergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Cette écriture est équivalente à l'existence d'une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n, \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| > \varepsilon$.

Remarque. On retiendra qu'une écriture de la forme « $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant \mathrm{N}, \mathcal{P}(n)$» permet de construire une suite $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(\varphi(n))$ est vraie.

Dans le cas d'une suite réelle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on définit aussi la divergence vers $+\infty$ et $-\infty$:

Définition 11. (Divergence vers $\pm\infty$ d'une suite réelle)
Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$$

et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *ou* $\lim u_n = +\infty$.

Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \leqslant -A$$

et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *ou* $\lim u_n = -\infty$.

Remarque. Rappelons qu'une limite est unique ! Et que tout suite convergente est bornée !

Si une suite admet une limite ℓ, il en est de même de toutes ses suites extraites :

Propriété 5. *Si (u_n) a pour limite ℓ (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites ont aussi pour limite ℓ.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition ; si à partir d'un certain rang N_0, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (resp. $u_n \geqslant A$, $u_n \leqslant -A$), alors à partir du rang $N_1 = min\,(\varphi^{-1}([N_0, +\infty[)$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$ (resp. $u_{\varphi(n)} \geqslant A$, $u_{\varphi(n)} \leqslant -A$). ∎

La réciproque partielle suivante est très souvent utile, que ce soit pour montrer la convergence ou la divergence de la suite.

Propriété 6. *La suite (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si ses suites extraites des termes de rangs pairs (u_{2n}) et impairs (u_{2n+1}) ont toutes deux pour limite ℓ (fini ou infini).*

Démonstration. Le sens direct découle de la propriété précédente. Pour la réciproque on applique aussi la définition ; si :

$$\forall n \geqslant N_0,\ |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \quad (\text{resp. } u_{2n} \geqslant A,\ u_{2n} \leqslant -A)$$
$$\forall n \geqslant N_1,\ |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \quad (\text{resp. } u_{2n+1} \geqslant A,\ u_{2n+1} \leqslant -A)$$

alors en posant $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$:

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad (\text{resp. } u_n \geqslant A,\ u_n \leqslant -A)$$

∎

Exemples.

- La suite $u_n = (-1)^n$ n'a aucune limite ; en effet $u_{2n} = 1 \longrightarrow 1$ et $u_{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$.
- La suite $v_n = \dfrac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$ a pour limite $\frac{1}{2}$; en effet :

$$v_{2n} = \frac{n}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad ; \quad v_{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Exercice 5. Vrai ou Faux ?

(1) $(u_n \to \ell$ et $\forall n, u_n > \ell) \implies (u_n$ décroissante à partir d'un certain rang$)$

(2) $(u_n \to \ell$ et $\ell > 1) \implies (u_n > 1$ à partir d'un certain rang$)$

(3) $(u_n \to \ell$ et $\forall n, u_n \neq \ell) \implies (u_n$ prend un nombre infini de valeurs distinctes$)$

(4) $u_n \in \mathbb{Z}$ et (u_n) converge $\implies (u_n)$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Résolution.

(2) Vrai : $(u_n - 1)_n$ tend vers $\ell - 1 > 0$ donc à partir d'un certain rang, $u_n - 1 > 0$. En effet en prenant $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$, il existe un rang N, pour lequel :

$$n \geqslant N \implies |u_n - 1 - \ell + 1| \leqslant \frac{\ell-1}{2} \implies u_n - 1 \geqslant \frac{\ell-1}{2} \implies u_n \geqslant 1 + \frac{\ell-1}{2} > 1$$

(3) Vrai : supposons que (u_n) ne prenne qu'un nombre fini de valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ et converge vers $\ell \neq v_i$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\min_i |\ell - v_i|}{2} > 0$; à partir d'un certains rang $N \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies \forall i \in [\![1,p]\!],\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell - v_i|}{2} \implies \forall i \in [\![1,p]\!], u_n \neq v_i$$

(4) Vrai : Soit $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$; à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, $u_n \in\ [\ell - \frac{1}{3}; \ell + \frac{1}{3}]$ qui est un intervalle d'amplitude $\frac{2}{3} < 1$; un tel intervalle ne peut contenir qu'au plus un entier ; (u_n) sera donc à partir du rang N stationnaire égale à cet entier (et par unicité de la limite cet entier est nécessairement ℓ).

2.2. Partie dense de $\mathbb{R}$.

Définition 12. (Partie dense de $\mathbb{R}$)
On dit qu'une partie $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 7. *$\mathscr{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathscr{A},\ |x - a| \leqslant \varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ pour tous $x < y$, il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $x < a < y$.*

Démonstration. La première équivalence découle de la définition.
La deuxième se déduit de la première : soit $x' = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \frac{y-x}{3} > 0$, il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|x' - a| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $x < \frac{5x+y}{6} = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{3} \leqslant a \leqslant \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{3} = \frac{x+5y}{6} < y$. ■

Exercice 6. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Résolution.

2.3. Limites et ordre.

Dans cette partie toutes les suites sont réelles.

Propriété 8. *Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$.*

Démonstration. (Esquisse) Si $\ell = +\infty$, le résultat découle immédiatement de la définition ; sinon, il en découle aussi mais en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. ■

Ce résultat admet une réciproque :

Propriété 9. *Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$, alors $\ell \geqslant 0$.*

Démonstration. (Esquisse) Par l'absurde : si $\ell < 0$ en appliquant la définition avec $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$ on contredira le fait qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$. ■

Remarque. Attention le résultat devient faux avec des inégalités strictes : $u_n > 0$ n'implique pas $\ell > 0$ (mais $\ell \geqslant 0$ bien sur) ; contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Corollaire 10. *Si (u_n) et (v_n) convergent, et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite $(v_n - u_n)$ en admettant (pour l'instant) que $\lim v_n - u_n = \lim v_n - \lim u_n$. ■

On dispose aussi du très utile théorème des gendarmes et de sa variante pour les limites infinies.

Théorème 11. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ alors :*
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Découle immédiatement de la définition. ■

Théorème 12. (Théorème des gendarmes)
Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Démonstration. Soit N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{array}{l} n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \\ n \geqslant N_2 \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies w_n \leqslant \ell + \varepsilon \end{array}$$

En posant $N = \max(N_0, N_1, N_2)$,

$$n \geqslant N \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

■

Souvent il est suffisant de faire appel au cas particulier souvent :

Théorème 13. *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite qui tend vers 0.*

2.4. Opérations sur les limites.

Les opérations usuelles sur les suites : somme, produit, quotient, puissance, se comportent assez bien avec leurs limites : en étendant naturellement ces opérations sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (pour les suites réelles), les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une puissance de suites sont (respectivement) les somme, produit, quotient ou puissance de leurs limites (s'il en est), à l'exception notable des <u>formes indéterminées</u> suivantes :

Formes indéterminées :

$$\overbrace{\infty - \infty}^{\text{somme}} \quad ; \quad \overbrace{0 \times \infty}^{\text{produit}} \quad ; \quad \overbrace{\frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\ell}{0}}^{\text{quotient}} \quad ; \quad \overbrace{1^{\infty} \quad ; \quad 0^0 \quad ; \quad \infty^0}^{\text{puissance}}$$

Pour le calcul de limite on utilise aussi le théorème de composition des limites :

Théorème 14. (Théorème de composition des limites)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim_{x\to\ell} f(x) = L \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$$

Démonstration. Découle des définitions des limites d'une suite ou fonction. Dans le cas de suites ou fonctions réelles, plusieurs cas sont à considérer selon que la limite soit finie ou non. ■

On utilise aussi les limites de références :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

et la croissance comparée de exp, ln et puissances :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x=0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x}=+\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} x\exp x=0^-.$$

Plus généralement, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\beta>0$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta|\ln x|^\alpha=0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha}=+\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x}=0^+.$$

Croissance comparée des suites factorielles, géométrique et puissance :

Croissance comparée de $n!$, q^n et n^α.

- *Pour tout $q>0$:*

$$\lim\frac{n!}{q^n}=+\infty$$

- *Pour tout $q>1$:*

$$\lim\frac{q^n}{n^\alpha}=+\infty$$

Exercice 7. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad v_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} \quad ; \quad w_n=2^n\left(n^{\frac{1}{n!}}-1\right)$$

Résolution.

$$= 2 \times \underbrace{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}}_{\longrightarrow 0} \times \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\longrightarrow 0} \times \underbrace{\left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n!}\right) - 1\right) \times \frac{n!}{\ln(n)}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 0$$

2.5. **Cas réel : suite monotone ; théorèmes de convergence.**
Etant donnée une suite, on ne sait pas toujours si sa limite existe mais quand la suite est monotone, on a le résultat important suivant :

Théorème 15. (Théorème de la limite monotone)
Soit (u_n) une suite réelle croissante
Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \to +\infty$.

Démonstration. (Esquisse) Lorsque (u_n) est majorée, la caractérisation de la borne supérieure et la croissance de (u_n) montrent que (u_n) converge vers $\sup u_n$; lorsque (u_n) n'est pas majorée, la croissance de (u_n) montre à l'aide de la définition que $\lim u_n = +\infty$. ■

Remarque. Le théorème se décline aussi pour une suite décroissante : (u_n) est décroissante ssi $(-u_n)$ est croissante, (u_n) est minorée ssi $(-u_n)$ est majorée et $\inf u_n = -\sup(-u_n)$.

Exercice 8.
(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ notée u_n.
(2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
(3) Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Résolution.

Définition 13. (Suites adjacentes)
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Le résultat fondamental des suites adjacentes est le suivant :

Théorème 16. *Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.*

Démonstration. En effet, $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, donc $v_n - u_n \geqslant 0 \implies v_n \geqslant u_n$; on en déduite que (u_n) est croissante et majorée par v_0, et que (v_n) est décroissante et minorée par u_0 ; elles sont donc toutes deux convergentes ; or par différence des limites, $\lim v_n - \lim u_n = 0$; elles ont donc même limite. ∎

Exercice 9.
Étudier $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ et prouver que $\lim u_n \notin \mathbb{Q}$.

Résolution.

2.6. **Relations de comparaison.**

Définition 14. (Relations de comparaison)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- *(u_n) est négligeable devant (v_n) si il existe $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ telle que $u_n = v_n \times \varepsilon_n$ pour n assez grand ou encore :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$$
on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o\,(v_n)$ ou plus simplement $u_n = o\,(v_n)$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, alors $u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- *(u_n) est dominée devant (v_n) si il existe (M_n) bornée telle que $u_n = v_n \times \mathrm{M}_n$ pour n assez grand ou encore :*
$$\exists \mathrm{M} > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M} \times |v_n|$$
on note : $u_n = \mathrm{O}_{n\to+\infty}\,(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} O\,(v_n)$ ou plus simplement $u_n = O\,(v_n)$.
- *(u_n) et (v_n) sont équivalentes si*
$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}\,(u_n)$$
$\left(\text{ou encore } = \underset{n\to+\infty}{o}\,(v_n)\right)$
on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$.
C'est équivalent à : il existe $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ telle que $u_n = v_n\,(1+\varepsilon_n)$ pour n assez grand, soit $u_n = v_n + o(v_n)$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, alors $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarques.
• Être négligeable est une relation :
– transitive : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

La croissance comparée s'écrit :

• Soient $q > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$:
$$(\ln n)^\alpha = o\left(n^\beta\right), \qquad n^\beta = o\left(q^n\right), \qquad q^n = o(n!)$$

• Être dominée est une relation :
– transitive : si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$,
– réflexive : $u_n = O(u_n)$.

• Être équivalent est une relation :
– transitive : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$,
– réflexive : $u_n \sim u_n$.
– symétrique : $u_n \sim v_n$ ssi $v_n \sim u_n$.
C'est ce qu'on appelle une relation d'équivalence.

Le résultat fondamental est :

Théorème 17.
$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ \text{et} \\ \lim v_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = L$$

Démonstration. (Esquisse) Découle immédiatement par produit des limites, avec $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. ∎

Pour le calcul d'équivalents on peut appliquer les propriétés suivantes :

Propriété 18.
• *Si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$ alors :*
$$u_n \sim \ell$$
• *Multiplication par $\lambda \neq 0$:*
$$\forall \lambda \neq 0,\ u_n \sim v_n \implies (\lambda.u_n) \sim (\lambda.v_n)$$
• *Inverse :*
$$u_n \sim v_n \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \sim \left(\frac{1}{v_n}\right)$$
• *Puissance :*
$$u_n \sim v_n \implies \forall p \in \mathbb{Z},\ u_n^p \sim v_n^p$$
Si de plus (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang :
$$u_n \sim v_n \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$
• *Valeur absolue (ou module) :*
$$u_n \sim v_n \implies |u_n| \sim |v_n|$$
• *Produit :*
$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$$
• *Quotient : si (u'_n) et (v'_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.*
$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \implies \left(\frac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\frac{v_n}{v'_n}\right)$$

Démonstration. (Esquisse) Découlent facilement de la définition par composition, produit et quotient des limites. ∎

Remarques.
• Rappelons que si $u_n = f(n)$ admet un développement limité (généralisé) au voisinage de $+\infty$, alors le première terme non-nul du DL donne un équivalent simple de u_n.
• Attention :
– On ne peut pas additionner des équivalents :
$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \text{n'entraîne pas en général que } \left(u_n + u'_n\right) \sim \left(v_n + v'_n\right)$$

Contre-exemple :

$$u_n = \left(n+\sqrt{n}\right) \sim n \qquad v_n = (1-n) \sim (1-n) \qquad u_n + v_n = (1+\sqrt{n}) \not\sim 1$$

– On ne peut pas composer des équivalents par une fonction :

Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans le domaine de définition d'une fonction f,

$$u_n \sim v_n \text{ n'entraîne pas en général que } f(u_n) \sim f(v_n)$$

Contre-exemple :

$$(n+1) \sim n \qquad \exp(n+1) \not\sim \exp(n) \quad \text{car } \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \longrightarrow e \neq 1$$

On a cependant les résultats partiels quant à la composition par exp ou ln, qu'il est bon de connaître :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \lim u_n - v_n = 0.$
- *si* $u_n \sim v_n$ *et sont* > 0 *alors* $v_n \longrightarrow \ell \neq 1 \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Démonstration. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \longrightarrow 1 \iff e^{u_n - v_n} \longrightarrow 1 \underset{\ln\circ}{\iff} u_n - v_n \longrightarrow 0.$
$u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) = \ln(v_n + o(v_n)) = \ln(v_n) + \ln(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$; or $\ln(1+\varepsilon_n) \longrightarrow 0$ donc si $v_n \longrightarrow \ell \neq 1$ alors $\ln(v_n) \longrightarrow L \neq 0$ et donc $\ln(1+\varepsilon_n) = o(\ln(v_n))$; ainsi $\ln(u_n) = \ln(v_n) + o(\ln(v_n))$, c'est à dire $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. ■

On utilise aussi beaucoup les équivalents usuels suivants :

Propriété 19.
Soit (u_n) *une suite convergeant vers 0 :*

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \tan(u_n) \sim u_n \qquad 1-\cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$
$$\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n$$
$$\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} \qquad \forall \alpha > 0, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

Démonstration. (Esquisse) Tous découlent de la définition et des limites usuelles (page 8). ■

Exercice 10. Calculer un équivalent simple de :

$$u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \frac{1}{n^2} \quad ; \quad v_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\sqrt{n^2-1} - n\right) \quad ; \quad w_n = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

Résolution.

Concernant la relation "être dominé", le résultat suivant est utile pour les séries :

Propriété 20. *Si à partir d'un certain rang* u_n *et* v_n *sont* > 0 *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors* $u_n = O(v_n)$.

Démonstration. Supposons les hypothèses vérifiées à partir du rang n_0 ; alors pour tout $n > n_0$, par télescopage :

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

ainsi pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, $|u_n| = u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \cdot v_n = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \cdot |v_n|$. ■

Étudions une suite définie implicitement :

Exercice 11. (CCP 2018).

On pose $\mathrm{P}_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

(1) Montrer que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera x_n.

(2) Calculer x_1, x_2 et montrer que $x_5 < 1$.
Étudier le signer de $\mathrm{P}_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
Montrer que la suite converge, on note ℓ sa limite.

(3) Montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$ puis que $\lim_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$. En déduire ℓ.

(4) On pose $\delta_n = x_n - \ell$. Exprimer δ_n et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} n\delta_n = 0$.

(5) Trouver un équivalent en $+\infty$ de δ_n.

Résolution.

3. Etude pratique de certaines suites

3.1. Suites arithmétiques.

Définition 15. (Suite arithmétique).
Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé la raison de (u_n).

Propriété 21.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$
- *Plus généralement : soit* $a, b \in \mathbb{N},\ a \leqslant b,\ \displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = (b-a+1) \times \frac{u_a + u_b}{2}$

  (= Nombre de termes × moyenne des premier et dernier termes.)

Démonstration. (Esquisse) Tous ces points s'obtiennent facilement par récurrence ; pour le 2ème et 3ème, une preuve plus astucieuse est : soit $S = \sum_{k=a}^{b} u_k$:

$$\begin{aligned}
2S =& (u_0 + ar) + (u_0 + (a+1)r) + \cdots + (u_0 + (b-1)r) + (u_0 + br) \\
&+ \underbrace{(u_0 + br) + (u_0 + (b-1)r) + \cdots + (u_0 + (a+1)r) + (u_0 + ar)}_{(b-a+1) \text{ termes sur chaque ligne, somme constante sur chaque colonne}} \\
=& (u_0 + ar + u_0 + br) \times (b-a+1) \\
\implies S =& (b-a+1) \times \frac{u_a + u_b}{2}
\end{aligned}$$

∎

Exercice 12. Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{k=11}^{30} (3k+1)$

Résolution.

3.2. **Suites géométriques.**

Définition 16. (Suite géométrique)
Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$; q est appelé la raison de (u_n).

Propriété 22.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot q^n$
- (u_n) *converge ssi* $|q| < 1$ *ou* $q = 1$ *ou* $u_0 = 0$.
  - *si* $|q| < 1$, $\lim u_n = 0$,
  - *si* $q = 1$ *ou* $u_0 = 0$, (u_n) *est stationnaire.*
- *Si* $q \neq 1$, *alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ *et plus généralement :*

$$\text{si } a, b \in \mathbb{N} \text{ avec } a \leqslant b,\quad \sum_{k=a}^{b} u_k = u_a \times \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a \times (b - a + 1)$.

Démonstration. (Esquisse) L'expression de u_n en fonction de n s'établit facilement par récurrence.
La convergence s'établit en étudiant la convergence de $|q|^n$ lorsque $|q| \neq 1$, à l'aide du théorème de la limite monotone (avec $(u_n \longrightarrow \ell \implies |u_n| \longrightarrow |\ell|)$ et $(\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0)$) ; dans le cas $|q| = 1$, soit $q^n = 1$ soit $q^n = e^{in\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, et dans ce cas soit $\mathrm{Re}(q^n)$ soit $\mathrm{Im}(q^n)$ diverge.
La somme des termes consécutifs peut s'obtenir soit par récurrence sur n, soit à l'aide de l'identité remarquable $1^{n+1} - q^{n+1} = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$. ■

Exercice 13. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{5 \times 2^j}{3^{2j+1}}$

Résolution.

3.3. Suites arithmético-géométriques.

Définition 17. (Suite arithmético-géométrique)
Une suite (u_n) est dite <u>*arithmético-géométrique*</u> *s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \{1\}) \times \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.*

Pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n on applique :

Propriété 23.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, $u_{n+1} = au_n + b$, et soit L le point fixe de la fonction de récurrence (i.e. $aL + b = L$) ; alors en posant $v_n = u_n - L$, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Démonstration. (Esquisse) Une suite stationnaire satisfaisant la même relation de récurrence, sera constante égale à L, point fixe de la fonction de récurrence ; l'existence et l'unicité de L découle de $a \neq 1$. Alors, $v_{n+1} = u_{n+1} - L = au_n + b - (aL + b) = a(u_n - L) = av_n$. ■

Exercice 14. Déterminer l'expression en fonction de n, nature et limite éventuelle, de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n + 2$.

Résolution.

Exercice 15. Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et borné, vérifiant $\forall x \in V$, $3x + 2 \in V$. Montrer que V est un singleton que l'on précisera.

Résolution.

3.4. Suites récurrentes linéaire d'ordre 2.

Définition 18. (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)
Une suite réelle (u_n) est dite <u>*récurrente linéaire d'ordre 2*</u> *s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.*

Remarque. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est uniquement déterminée par la donnée de la relation de récurrence et par <u>deux termes</u> de la suite ; le plus souvent les deux premiers, u_0, u_1.

Pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n on applique :

Théorème 24. (Expression de u_n en fonction de n)
Soient $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On considère l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - ar - b = 0 \qquad (*)$$

et son discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.
- *Si $\Delta > 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_n = \alpha \times r_1^n + \beta \times r_2^n$$

- *Si $\Delta < 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_n = \rho^n \times (\alpha \times \cos(n\theta) + \beta \times \sin(n\theta))$$

où $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1)$ $[2\pi]$.
- *Si $\Delta = 0$; soit r_0 l'unique solution de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_n = (\alpha + \beta \times n) \times r_0^n$$

Démonstration. (Esquisse) On remarque d'abord que par linéarité de la relation de récurrence, si (a_n) et (b_n) sont deux suites satisfaisant la relation de récurrence, toutes leurs combinaisons linéaires $(\alpha.a_n + \beta.b_n)$ satisfont aussi la relation de récurrence. On recherche les suites géométriques (r^n) satisfaisant la relation de récurrence ; il est facile de voir que c'est équivalent à ce que la raison r soit solution de l'équation caractéristique $(*)$.
Si $\Delta > 0$: $(*)$ a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et donc toutes les suites d'expression de la forme $(\alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n)$ satisfont la même relation de récurrence que (u_n) ; il suffit de trouver α et β pour lesquels les deux premiers termes de la suite soient u_0 et u_1 pour avoir l'expression de u_n en fonction de n : cela revient à résoudre un système linéaire de déterminant $r_1 - r_2 \neq 0$; d'où l'existence et l'unicité de α et β.
Si $\Delta = 0$: $(*)$ a une seule racine réelle r_0. On vérifie que sous cette hypothèse, la suite (nr_0^n) satisfait aussi la relation de récurrence ; toutes les suites d'expression de la forme $(\alpha \cdot r_0^n + \beta \cdot nr_0^n)$ satisfont la même relation de récurrence, et on cherche comme précédemment les α et β qui conviennent ; c'est fois-ci on aboutit à un système linéaire de déterminant $r_0 \neq 0$ puisque $(a, b) \neq 0$.
Si $\Delta < 0$: $(*)$ a deux racines complexes conjuguées r_1, r_2 ; comme dans le cas $\Delta > 0$ on obtient d'uniques α, β tels que $u_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n$; seulement α, β, r_1 et r_2 sont des complexes, et on souhaiterait obtenir une expression de u_n avec des coefficients réels.
Puisque u_n est réel et r_1, r_2 sont conjugués, on remarque que α et β sont nécessairement conjugués :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \overline{u_n} = \overline{\alpha} \cdot \overline{r_1}^n + \overline{\beta} \cdot \overline{r_2}^n = \overline{\beta} \cdot r_1^n + \overline{\alpha} \cdot r_2^n = \alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n \implies \beta = \overline{a}$$

Ainsi en posant $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \alpha\rho^n \times e^{in\theta} + \beta\rho^n \times e^{-in\theta} \\
&= \rho^n \left(\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}\right) = \rho^n \Big(\underbrace{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}_{=\alpha} e^{in\theta} + \underbrace{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}_{=\beta} e^{-in\theta} \Big) \\
&= \rho^n \Big(\frac{\alpha+\beta}{2} \times \left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) + \frac{\alpha-\beta}{2} \times \left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) \Big) = \rho^n \Big(\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{=Re(\alpha)\in\mathbb{R}} \times 2 \times \cos(n\theta) + \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{2}}_{=iIm(\alpha)\in i\mathbb{R}} \times 2i \times \sin(n\theta) \Big)
\end{aligned}$$

Ainsi en posant : $A = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$; $B = (\alpha - \beta) \times i \in \mathbb{R}$; $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1)$ $[2\pi]$
il existe deux réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \rho^n \times (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$. ■

Exercice 16. Calculer u_n en fonction de n : $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$; puis déterminer sa nature et limite éventuelle.

Résolution.

Exercice 17. (CENTRALE 2009)

(1) Étudier la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

(2) Que peut-on dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y), f(x, y) = f\left(y, \frac{x+y}{6}\right)$?

Résolution.

3.5. **Suites réelles du type** $u_{n+1} = f(u_n)$**.**
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On s'intéresse aux suites « définies » par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Précisément, cette suite n'est pas toujours bien définie si les termes «sortent»du domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Notons cependant que si a est dans une sous-partie $I \subset \mathcal{D}$ stable par f (i.e. $f(I) \subset I$), alors alors la suite est bien définie.

Supposons désormais (u_n) bien définie.

Si f est continue et si $u_n \to \ell \in \mathcal{D}$ alors $f(\ell) = \ell$: une limite $\ell \in \mathcal{D}$ est nécessairement un point fixe de f.

Démonstration. En effet : par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$: $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\lim u_n) \implies \ell = f(\ell)$. ∎

Plus généralement, la limite s'obtient par un passage à la limite dans la relation de récurrence.

Théorème 25.
On suppose qu'un certain terme $u_{n_0} \in I$ avec I stable par f (i.e. $f(I) \subset I$), alors $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$ et :
- *Si $\forall x \in I, f(x) \geqslant x$ alors (u_n) est croissante.*
- *Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant x$ alors (u_n) est décroissante.*
- *Si f est croissante alors (u_n) est monotone à partir de n_0 ; le sens dépend de u_{n_0} et u_{n_0+1}.*
- *Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.*

Démonstration. (Esquisse) Les 3 premiers points s'obtiennent facilement en considérant le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour le dernier point, on passe par $g = f \circ f$ et on remarque que si f est décroissante, alors g est croissante ; de plus (u_{2n}) et (u_{2n+1}) auront des monotonies contraires, puisque par décroissance de f, $u_{2(n+1)} - u_{2n}$ et $u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = f(u_{2(n+1)}) - f(u_{2n})$ sont de signes opposés. ∎

Remarque. Plan d'étude d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue.
- On dresse le tableau de variation de f. Tant que possible on y fait figurer ses points fixes.
- On cherche un intervalle I stable par f, le plus petit possible, contenant u_0. La suite (u_n) est alors bien définie, et à valeurs dans I. Si on n'en trouve pas, on change d'approche.
  En pratique on cherchera un intervalle dont les extrémités sont des points fixes ou des bornes du domaine de définition qui sont consécutifs dans le tableau de variation. Cela évitera d'avoir à réduire ultérieurement I.

↪ Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone ; on précise sa monotonie soit en comparant deux termes consécutifs, u_0, u_1 par exemple, soit en montrant que sur I, $f(x) - x$ garde un signe constant.

- ↪ (u_n) admet donc une limite par le théorème de la limite monotone ; on la détermine par passage à la limite dans la relation de récurrence. Lorsque $I = [a, b]$ est un segment, la limite est un point fixe de f.
- ↪ Lorsque le passage à la limite donne plusieurs solutions ne permettant pas de conclure, une au moins est dans I, et est donc un point fixe de f ; l'intervalle I peut être réduit en un intervalle J stable par f en découpant par ce point fixe (mauvais choix de I ?). On reprend l'étude sur J.

↪ Si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.

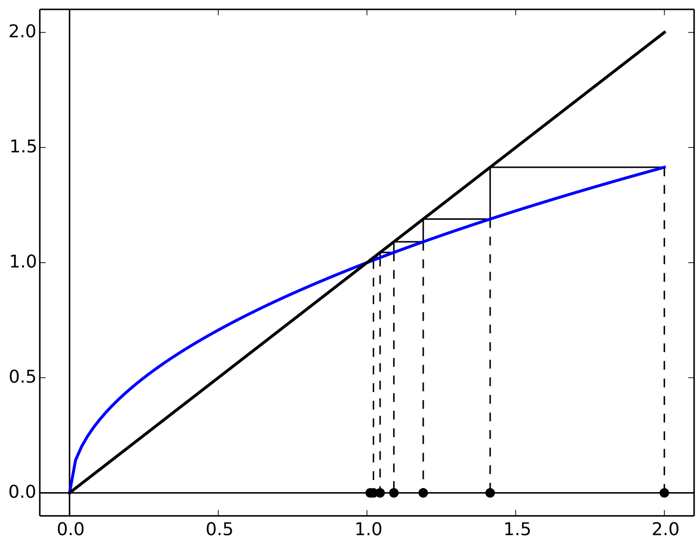
- ↪ On applique l'étude à (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; attention leur fonction de récurrence est $f \circ f$ et non plus f : le passage à la limite se fait dans $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $(v_n) = u_{2n}$ ou (u_{2n+1}). Tout point fixe de f est aussi point fixe de $f \circ f$ mais la réciproque est fausse.
- ↪ Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limites, c'est aussi la limite de (u_n). Sinon, (u_n) n'a pas de limite.

↪ Si f n'est pas monotone sur I ; ça aboutit rarement et l'étude peut être très compliquée.

- ↪ Soit $f(x) - x$ garde un signe constant sur I, (u_n) est monotone ; on procède de la même façon.
- ↪ Soit f admet un point fixe sur I ; si cela permet de réduire I à un intervalle J plus petit et stable par f, on reprend l'étude sur J (mauvais choix de I). Sinon, on change d'approche.

Exemples.

• $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$; $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.
L'intervalle $I = [1; +\infty[$ est stable par f. La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I.
La fonction f est croissante, donc (u_n) est monotone ; puisque $u_0 = 2 > u_1 = \sqrt{2}$, elle est décroissante. (On pourrait aussi remarquer que sur $[1; +\infty[$, $\sqrt{x} \leqslant x$).
Minorée par 1, (u_n) est convergente, vers un point fixe de f ; or $f(x) = x \iff x = 0$ ou $x = 1$.
Ainsi (u_n) converge vers 1.



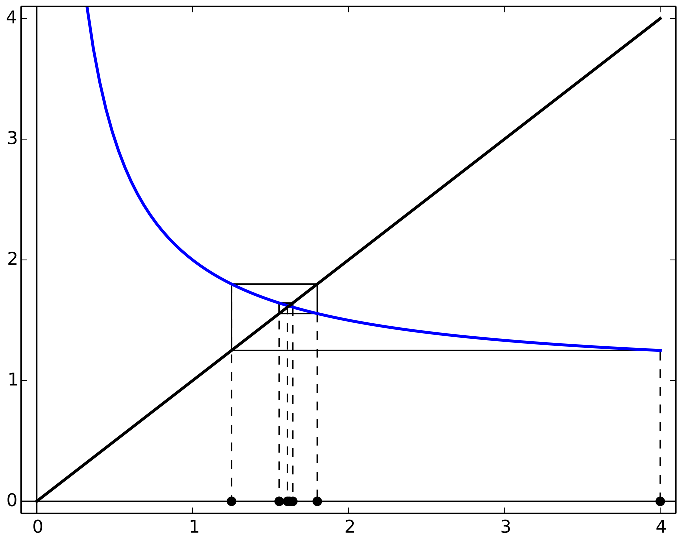
• $u_0 = 4$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$; $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
L'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ est stable par f ; (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire ; $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{5}{4}$, $u_2 = \frac{9}{5}$, $u_3 = \frac{14}{9}$: (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.
La fonction $g = f \circ f : x \longmapsto 1 + \dfrac{x}{x+1}$; elle admet un unique point fixe $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et les intervalles $]0; \phi]$ et $[\phi; +\infty[$ sont stables par g.
En effet :

$$g(x) = x \iff x(x+1) = x + 1 + x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

et : g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante. Sa limite en $+\infty$ est 2, et on en déduit ses variations :

x	0	ϕ	$+\infty$
g'		$+$	
$g(x)$	1 ↗	ϕ ↗	2

Or $u_1 < \phi < u_0$ ainsi, (u_{2n}) est décroissante et minorée (par ϕ), et (u_{2n+1}) est croissante et majorée (par ϕ) ; elles convergent donc toutes deux vers ϕ (le nombre d'or).



Exercice 18. Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \cdots - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}}$$

(il y a n radicaux).

Résolution.

3.6. **Code Python pour l'obtention des graphiques.**
Ces deux derniers graphiques ont été obtenues à l'aide du code :

```
# Trace de suites recurrentes

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def traceSuiteRec(f, x0, N):
    x = x0
    xmin = xmax = x0    # fenetre de trace
    # Trace des points de la suite
    y = f(x)
    plt.plot([x,x], [0,y], '--k')
    plt.plot([x,y], [y,y], 'k')
    plt.plot([x], [0], 'ok')
    plt.plot([y], [0], 'ok')
    x = y
    for n in range(N):
        y = f(x)
        plt.plot([x,x], [x,y], 'k')
        plt.plot([x,x], [y,0], '--k')
        plt.plot([x,y], [y,y], 'k')
        plt.plot([y], [0], 'ok')
        x = y
        xmin = min(xmin, x) # MaJ fenetre
        xmax = max(xmax, x)
    # Trace fenetre et axe
    plt.axhline(color='black')
    plt.axvline(color='black')
    xmin = min(0, xmin)
    plt.xlim(xmin-0.1, xmax+0.1)
    plt.ylim(xmin-0.1, xmax+0.1)
    # Trace des courbes
    X = np.linspace(xmin,xmax,100)
    Y = f(X)
    plt.plot(X,Y, 'b', linewidth=2) # y = f(x)
    plt.plot(X,X, 'k', linewidth=2) # y = x
    plt.show()
```

puis pour le premier par :

```
>>> traceSuiteRec(lambda x: x**0.5, 2, 5)
```

pour le second par :

```
>>> traceSuiteRec(lambda x: 1+1/x, 2, 5)
```